Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques II

Examen Final

Exercice1 : (07pts)

Le tableau suivant donne le nombre d'étudiants absents à un cours hebdomadaire de mathématiques

Nombre d'étudiants absents x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de semaines n_i	7	11	8	3	2	1

1. Calculer le nombre moyen d'absents par cours, ainsi que la variance.
2. Peut-on admettre que les données du tableau précédent peuvent être ajustées par une loi de Poisson ?
3. Tester l'ajustement par un test du χ^2(khi deux), aux seuils de signification $\alpha = 5\%$, puis $\alpha = 50\%$ et $\alpha = 90\%$.

Indication : La loi de Poisson $P(\lambda)$ est définie par : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Exercice 2 : (07pts)

Soit le tableau suivant :

$X = x_i$	52	60	71	90	115	200
$Y = y_i$	60	50	35	30	20	10

On soupçonne que les variables statistiques X et Y soient liées par la relation $Y = BA^X$, où A et B sont des constantes réelles strictement positives.

1. Après un changement de variables adéquat, calculer le coefficient de corrélation ρ
2. Etait-il légitime de penser que $Y = AB^X$?
3. Trouver alors les valeurs de A et B ?

Exercice 3 : (06pts)

Soit λ un paramètre réel, soient X et Y deux variables statistiques données.

En utilisant l'expression $E[(X - E(X)) - \lambda(Y - E(Y))]^2$, montrer que le coefficient de corrélation ρ est toujours tel que $|\rho| \leq 1$.

Indication : $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

Probabilités Statistiques II

Examen final (2018-2019) M1 GI.

Corrigé - type.

Exercice 1: $N = 32$.

1. $\bar{X} = \sum_i f_i x_i = \sum_i \frac{n_i}{N} x_i = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i$

$\bar{X} = \frac{1}{32}(7\times 0 + 11\times 1 + 8\times 2 + 3\times 3 + 4\times 2 + 5\times 1) = 1,53125.$

$\boxed{\bar{X} = 1,53}$ (1pt)

$V(x) = \sum_i f_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

$= \frac{1}{32}(7\times 0^2 + 11\times 1^2 + 8\times 2^2 + 3\times 3^2 + 2\times 4^2 + 1\times 5^2) - (1,53)^2$

$\boxed{V(x) = 1,624}$ (1pt)

2. On sait que pour une loi de Poisson $P(\lambda)$ $E(x) = V(x) = \lambda$

ici on remarque que $\bar{X} = 1,53 \simeq V(x) = 1,62$; donc il semble possible d'ajuster X par une loi de Poisson. (1pt)

3. $\bar{X} = 1,53$ est une bonne estimation du paramètre λ de la loi $P(\lambda)$

il faut commencer par calculer les p_i théoriques. $P(X=i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$

On trouve $p_1 = P(x=0) = 0,2165$; $p_2 = P(x=1) = 0,3313$; $p_3 = P(x=2) = 0,2534$

$p_4 = P(X=3) = 0,1292$, $P(x=4) = 0,0494$; $P(x=5) = 0,0151$.

$\chi^2_{cal} = \sum_i \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$ avec la condition $Np_i > 5$

n_i	7	11	8	3	2	1
p_i	0,2165	0,3313	0,2534	0,1292	0,0494	0,0151
Np_i	6,928	10,6	8,1088	4,1344	1,58	0,4832

On doit regrouper les trois dernières classes ; on obtient alors :

n_i	7	11	8	6
Np_i	6,928	10,6	8,1088	6,1976

$$\chi^2_{Cal} = \frac{(7-6,928)^2}{6,928} + \frac{(11-10,6)^2}{10,6} + \frac{(8-8,1088)^2}{8,1088} + \frac{(6-6,1976)^2}{6,1976}$$

$$\boxed{\chi^2_{Cal} = 0,023}$$

02pts

$\chi^2_{\nu}(\alpha)$ de la table ; avec $\nu = k-1-1$ (Car on a estimé λ).
$= 2$

$\chi^2_2(0,05) = 5,99$; $\chi^2_2(0,5) = 1,38$; $\chi^2_2(0,9) = 0,211$

Dans les trois cas χ^2_{Cal} reste inferieur
Donc on accepte l'hypothèse d'ajustement de X par $P(1,53)$
pour les trois seuils donnés.

02pts

Exercice 2 :

1/ $Y = BA^X$; comme touts les valeurs sont strictement positives
on peut écrire $\ln Y = \ln(BA^X) = \ln B + \ln A^X = \ln B + X \ln A$
ainsi $\ln Y = (\ln A) X + \ln B$ on pose $Z = \ln Y$; $a = \ln A$; $b = \ln B$
On obtient $Z = aX + b$ Donc on suppose que Z est en
Corrélation linéaire avec X.

01pt

X	52	60	71	90	115	200
Y	60	50	35	30	20	10
$Z = \ln Y$	4,094	3,912	3,555	3,401	2,996	2,302

$\overline{X} = \sum f_i x_i$ ici $f_i = f = \frac{1}{6}$ (il y'a 6 cas possibles)

$\boxed{\overline{X} = 98}$

$\overline{Z} = \sum f_j z_j$ ici $f_j = f = 1/6$ (il y'a 6 cas possibles)

$\boxed{\overline{Z} = 3,376}$

$V(X) = \sum f_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{6} \sum_i x_i^2 - \overline{X}^2$

$\boxed{V(X) = 2507,6666} \Longrightarrow \boxed{\sigma_X = 50,07}$

$V(Z) = \sum f_j z_j^2 - \overline{Z}^2 = \frac{1}{6} \sum z_j^2 - \overline{Z}^2$

$\boxed{V(Z) = 0,36} \Longrightarrow \boxed{\sigma_Z = 0,6}$

$Cov(X,Z) = \sum f_{ij} x_i z_j - \overline{X}\,\overline{Z}$ ici tous les $f_{ij} = 1/6$.

$= 1/6 \sum x_i z_j - \overline{X}\,\overline{Z}$

$\boxed{Cov(X,Z) = -29,0075}$

$\rho = \frac{Cov(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = \frac{-29,0075}{50,07 \times 0,6}$

$\boxed{\rho = -0,96}$

02pts

2. Comme $\rho \simeq -1$; Z et X sont fortement liés par une corrélation linéaire $Z = aX + b$ et donc nécessairement Y et X sont fortement liés par l'équation $Y = BA^X$.

Donc oui ; il est légitime de penser que $Y = BA^X$. 01pt

3. Pour trouver A et B ; il suffit de calculer a, b

$a = \frac{Cov(X,Z)}{V(X)}$ et $b = \overline{Z} - a\overline{X}$ coefficient de la droite de regression $Z = aX + b$.

Donc $a = \frac{-29{,}0075}{2507{,}66} \Rightarrow \boxed{a = -0{,}01156}$

$b = 3{,}376 - (-0{,}01156) \times 98 \Rightarrow \boxed{b = 4{,}5}$

$a = \ln A \Rightarrow A = e^{a} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}9885}$

$b = \ln B \Longrightarrow B = e^{b} \Rightarrow \boxed{B = 90{,}017}$

3pts

ainsi $\boxed{Y = (90{,}017) \times (0{,}9885)^{X}}$

Exercice 3 : Commençons par observer que $E\left[(X-E(X)) - \lambda(Y-E(Y))\right]^2 \geq 0$.

D'un autre côté :

$$E\left[(X-E(X)) - \lambda(Y-E(Y))\right]^2 = E\left[(X-E(X))^2 - 2\lambda(X-E(X))(Y-E(Y)) + \lambda^2(Y-E(Y))^2\right]$$

$$= E\left[(X-E(X))^2\right] - 2\lambda E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] + \lambda^2 E\left[(Y-E(Y))\right]^2$$

Comme cette dernière expression est toujours positive quelle que soit la valeur de λ alors nécessairement $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = \cancel{4}\, E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]^2 - \cancel{4}\, E\left[(X-E(X))^2\right] E\left[(Y-E(Y))^2\right] \leq 0$$

Donc $Cov^2(X,Y) - V(X)V(Y) \leq 0 \Rightarrow Cov^2(X,Y) \leq V(X)V(Y)$

$\Rightarrow \frac{Cov^2(X,Y)}{V(X)V(Y)} \leq 1$ (Si $V(X)=0$ ou $V(Y)=0$ la propriété est trivialement vérifiée)

En prenant la racine carrée on obtient

$\Rightarrow \left|\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right| \leq 1 \Rightarrow |\rho| \leq 1$.

06 pts

Gtd.