Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques II

Examen Final

La consultation des copies aura lieu (inchallah) le Dimanche 20 Mai à 11h00 au Bloc C

Exercice1 : (10pts)

Le tableau suivant donne les notes Y obtenues par des étudiants à un examen, et le nombre d'heures X qu'ils ont consacré à la préparation de cet examen :

X \ Y	$0 \leq Y < 5$	$5 \leq Y < 10$	$10 \leq Y < 15$	$15 \leq Y < 20$
0	13	10	0	0
1	2	15	1	0
2	0	2	14	0
3	0	0	12	15
4	0	0	2	14

1. Donner les lois marginales de X et de Y.
2. Donner la loi conditionnelle $\mathcal{L}(Y/X=1)$.
3. Calculer Cov(X,Y).
4. Calculer le coefficient de corrélation entre Y et X. Que pouvez-vous conclure ?
5. Selon cette étude, combien de temps un étudiant aurait-il dû passer à préparer cet examen pour obtenir la note de 13 ?

Exercice 2 : (10pts)

Afin de mieux gérer les commandes, un directeur d'usine réalise une étude relative aux délais d'attente avant chaque livraison d'une commande. Les délais de livraison sont supposés suivre une loi normale. Un échantillon de 30 commandes, sur un total de 3000 commandes, donne le tableau suivant :

Délai de livraison en jours	[0, 10[	[10, 20[	[20, 30[	[30, 40[	[40, 50[	[50, 60[
Nombre de commandes	3	6	10	7	3	1

1. Quel est l'intervalle de confiance pour le délai moyen de livraison à 95% ?
2. Répondre à la question précédente si l'échantillon est pris sur un total de 50 commandes.
3. Répondre à la première question si les délais de livraison suivent une loi de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda = 26,3$.

Remarque : Si X suit une loi normale centrée réduite N(0,1) on donne : $P(|X| \leq U) = 0.95 \Rightarrow U = 1.96$.

Examen Proba-Stat II

Corrigé.

Exercice 1: Reprenons le tableau avec les fréquences.

X \ Y	2,5	7,5	12,5	17,5	
0	0,13	0,1	0	0	0,23
1	0,02	0,15	0,01	0	0,18
2	0	0,02	0,14	0	0,16
3	0	0	0,12	0,15	0,27
4	0	0	0,02	0,14	0,16
	0,15	0,27	0,29	0,29	

1/ Lois marginales

X	0	1	2	3	4
$f_{i.}$	0,23	0,18	0,16	0,27	0,16

$(\bar{X} = 1,95)$

Y	2,5	7,5	12,5	17,5
$f_{.j}$	0,15	0,27	0,29	0,29

$(\bar{Y} = 11,1)$.

1pt

2/ $\mathcal{L}(Y / X = 1)$.

Y	2,5	7,5	12,5	17,5
$\frac{f_{j2}}{f_{.2}}$	$\frac{0,02}{0,18} = 0,11$	$\frac{0,15}{0,18} = 0,83$	$\frac{0,01}{0,18} = 0,06$	$\frac{0}{0,18} = 0.$

2pts

3/ $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= \sum f_{ij} x_i y_j - \sum f_{i.} x_i \sum f_{.j} y_j$

$= 28,275 - 11,1 \times 1,95$

$Cov(X,Y) = 6,63$

2pts

4. le coefficient de corrélation

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$$

$V(X) = \sum f_{i.} x_i^2 - \bar{X}^2 = 2{,}0075$, $V(Y) = \sum f_{.j} y_j^2 - \bar{Y}^2 = 27{,}04$.

$\sigma_X = \sqrt{2{,}0075} = 1{,}4168$, $\sigma_Y = \sqrt{27{,}04} = 5{,}2$.

$$\rho = \frac{6{,}63}{1{,}4168 \times 5{,}2} = 0{,}8999153.$$

ρ est proche de 1 ($\rho \simeq 0{,}9$) on peut donc légitimement penser qu'il y'a corrélation linéaire entre Y et X.

2pts

5. Calculons l'équation de la droite de régression de Y en X.

$$Y = aX + b.$$

$a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{6{,}63}{2{,}0075} = 3{,}3$, $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 11{,}1 - 3{,}3 \times 1{,}95 = 4{,}66$

$$\boxed{Y = 3{,}3X + 4{,}66}$$

Pour connaître le temps nécessaire de préparation X pour obtenir la note $Y = 13$; il suffit de remplacer dans l'équation de la droite de régression.

$$13 = 3{,}3X + 4{,}66 \Rightarrow X = \frac{13 - 4{,}66}{3{,}3} = 2{,}53$$

il faut donc compter 2^h30 (2 heures et demie) de préparation pour obtenir la note de 13 / 20.

3pts

Exercice 2 :

Delai	5	15	25	35	45	55
n_i	3	6	10	7	3	1
f_i	0,1	0,2	0,33	0,24	0,1	0,03

m pour l'échantillon est donnée par : $\sum f_i x_i = 26{,}3$

Var " " " " " $\sum f_i x_i^2 - \overline{x}^2 = 12{,}22$.

La moyenne est supposée être la même entre l'échantillon et la population totale (26,3). Par contre on ne connait pas l'écart type de la population on prendra $\sigma = 12{,}22$ comme approximation

Donc $m = 26{,}3$ et $\sigma \simeq 12{,}22$

Ici $n \geq 30$ $(n = 30)$ Donc $\overline{X}$ suit une loi normale

$N = 3000$ donc $n << 3000$ on ne fera pas de différence entre tirage exhaustif ou non exhaustif.

$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12{,}22}{\sqrt{30}} = 2{,}22$ Donc $\overline{X}$ suit une loi $N(26{,}3 , 2{,}22)$

$P\left(\left|\frac{\overline{X} - 26{,}3}{2{,}22}\right| \leq u_\alpha\right) = 0{,}95 \Rightarrow u_\alpha = 1{,}96$ (donné).

Donc $-1{,}96 \leq \frac{\overline{X} - 26{,}3}{2{,}22} \leq +1{,}96$

on trouve $20{,}6 \leq \overline{X} \leq 32$

Donc le délai moyen d'attente se situe à 95% dans l'intervalle $[20{,}6 , 32]$ jours.

3pts

2/ Ici $N = 50$

m ne change pas $m = 26,3$

Par contre pour σ on doit distinguer deux cas

- Tirage non exhaustif :

On trouve les mêmes résultats que la question 1.

- Tirage exhaustif :

$m = 26,3$ $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 2,22 \sqrt{\frac{50-30}{50-1}} = 1,42.$

$\bar{X}$ suit alors une loi $N(26,3 ,\ 1,42)$.

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - 26,3}{1,42}\right| \leq u_\alpha\right) = 0,95 \Rightarrow u_\alpha = 1,96.$

Donc $26,3 - 1,42 \times 1,96 \leq \bar{X} \leq 1,42 \times 1,96 + 26,3$

$$23,52 \leq \bar{X} \leq 29.$$

Dans ce cas le délai moyen d'attente pour une livraison se situe à 95% dans l'intervalle $[23,52,\ 29]$ jours.

3pts

3/ Comme $n \geq 30$ ~~peu~~. importe la loi que suit la population totale, $\bar{X}$ suit une loi normale donc on retrouve les mêmes résultats que la première question.

4pts