Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
$1^{ère}$ Année
Outils Mathématiques

Examen final

La consultation des copies aura lieu (inchallah)

le Dimanche 20 Mai à 10h00 au Bloc C

Exercice1 : (06pts)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, un paramètre réel. Résoudre selon les valeurs de λ l'équation suivante :

$$y'' - (1+\lambda)y' + \lambda y = 0,$$

puis trouver l'unique solution qui vérifie

$$y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

Exercice2 : (06 pts)

Soit le nombre complexe suivant : $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer z^2.

2. Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice3 : (08pts)

Calculer ce qui suit :

$$I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$I_2 = \int \frac{3x-1}{x^2+x+9}\,dx$$

$$I_3 = \int \frac{\ln(x^2+2x+5)}{(x-1)^2}\,dx$$

Corrigé de l'examen final
Outils Mathématiques.

Exercice 1: $y'' - (1+\lambda)y' + \lambda y = 0$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Eq. Caractéristique: $r^2 - (1+\lambda)r + \lambda = 0$.

$$\Delta = (1+\lambda)^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

1er cas: $\lambda = 1 \Rightarrow \Delta = 0$. racine double $r_1 = r_2 = 1$.

$$\boxed{y = y_0 = (C_1 + C_2 x)e^x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.}$$ 1pt

2ème cas: $\lambda \neq 1$; $\Delta = (\lambda-1)^2 > 0$.

$$r_1 = \frac{(1+\lambda) - (\lambda - 1)}{2} = 1 \quad , \quad r_2 = \frac{(1+\lambda) + (\lambda-1)}{2} = \lambda.$$

$$\boxed{y = y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{\lambda x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$ 1pt

$y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1er cas $\lambda = 1$ $\quad y = (C_1 + C_2 x)e^x \Rightarrow y' = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$; $y'(0) = 0 \Rightarrow 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$.

$$\boxed{y = (1-x)e^x}$$ 2pts

2ème cas $\lambda \neq 1$ $\quad y = C_1 e^x + C_2 e^{\lambda x} \Rightarrow y' = C_1 e^x + \lambda C_2 e^{\lambda x}$.

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$; $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 + \lambda C_2 = 0$

$C_2(1-\lambda) = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{1-\lambda}$ $\quad (\lambda \neq 1$ donc $1 - \lambda \neq 0)$

$$C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda-1}{1-\lambda} = \frac{-\lambda}{1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

$$\boxed{y = \frac{\lambda}{\lambda-1}e^x + \frac{1}{1-\lambda}e^{\lambda x}}$$ (2pts)

Exercice 2 :

$$z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

1. $z^2 = \left(2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\right) + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$$\boxed{z^2 = 2\sqrt{3} + 2i}$$ (2pts)

2. Mettons z^2 sous forme trigonométrique

$$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4e^{i\pi/6}.$$

Si $z = re^{i\theta} \Longrightarrow z^2 = 4e^{i\pi/6} \Longrightarrow r^2e^{2i\theta} = 4e^{i\pi/6} \Longrightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \\ 2\theta = \pi/6 + 2k\pi \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \pi/12 + k\pi \end{cases} \quad k = 0, 1.$$

Donc $z = 2e^{i\pi/12}$ ou $z = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

or $z = 2\left(\underbrace{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}_{>0} + i\underbrace{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}_{>0}\right)$ Donc nécessairement

$z = 2e^{i\pi/12}$ car $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{12} > 0$

Par identification

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

(2pts) (2pts)

Exercice 3 :

- $I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$ Posons : $t = \sqrt{1-x}$ donc $1-x = t^2$

$x = 1-t^2 \Longrightarrow dx = -2t\,dt.$

$$I_1 = \int \frac{-2t}{1+t}\,dt = \int \frac{-2t-2+2}{1+t}\,dt = \int \frac{-2(t+1)+2}{1+t}\,dt$$

$$I_1 = \int \left(-2 + \frac{2}{1+t}\right) dt$$ (on acceptera aussi la division euclidienne)

$$I_1 = -2t + 2\ln|1+t| + C \,, \quad \boxed{I_1 = -2\sqrt{1-x} + 2\ln\left(1+\sqrt{1-x}\right) + C \quad C\in\mathbb{R}}$$ 2,5 pt

- $$I_2 = \int \frac{3x-1}{\underbrace{x^2+x+9}_{\Delta<0}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+9} - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+9}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+9) - \frac{5}{2}J.$$

$$x^2+x+9 = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + 9 - \tfrac{1}{4} = \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} = \frac{35}{4}\left(\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{35}{4}} + 1\right) = \frac{35}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{35}}\right)^2 + 1\right)$$

$$J = \frac{1}{\frac{35}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{35}}\right)^2 + 1}\,dx$$ on pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{35}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{35}}dx \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{35}}dx$

$$J = \frac{2}{\sqrt{35}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{35}}\right)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2}\ln(x^2+x+9) - \frac{5}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{35}}\right) + C \quad (C\in\mathbb{R})}$$ 2,5 pt

- $I_3 = \int \frac{\ln(x^2+2x+5)}{(x-1)^2}\,dx$ par parties : $f = \ln(x^2+2x+5) \longrightarrow f' = \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$; $g' = \frac{1}{(x-1)^2} \longrightarrow g = \frac{-1}{x-1}$

$$I_3 = -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \int \frac{2x+2}{\underbrace{(x^2+2x+5)}_{\Delta<0}(x-1)}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \int \frac{Ax+B}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{C_1}{x-1}\,dx.$$

Par identification on trouve:

$$I_3 = -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5) + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5) + \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(x^2+2x+5)}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$\boxed{I_3 = -\ln(x^2+2x+5)\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}$$

3pts