République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : E.D.P et Applications

présentée par

Leggat Ahmed Reda

Soutenue le : xx-xx-2019

Étude d'une classe de problèmes anisotropes

Soutenue devant le jury composé de :

M. Abdellaoui. B.	Professeur, Université de Tlemcen	Président
M. Benaissa. A.	Professeur, Université de S.B.A	Examinateur
M. Touaoula. M.T.	Professeur, Université de Tlemcen	Examinateur
M. Azzouz. A.	Maître de Conférences Université de Saida	Examinateur
M. Bouchekif. M.	Professeur, Université de Tlemcen	Invité
M. Miri. S.E.H.	Maître de Conférences, Université de Tlemcen	Directeur de thèse

Laboratoire d'Analyse Non Linéaire
& Mathématiques Appliquées
- L.A.N.L.M.A -
Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Département de Mathématiques
Faculté des sciences
BP 119 Tlemcen

leggat2000@yahoo.fr

A mes chers parents : Abderrahmane et Fatma
Sources de mes joies, secret de ma force.
Vous serez toujours le modèle
A mon frère et mes Soeurs
A mes chères filles Yasmine et Amani alae
que Dieu les protège.

A la mémoire de mon beau père Oussalah Abdellah
qui a si attendu ma réussite.

"Soit A un succès dans la vie.
Alors A = x + y + z,
où x = travailler, y = s'amuser,
z = se taire."
Albert Einstein.

Remerciements

Je tiens tout d'abord, à adresser mes plus vifs et plus sincères remerciements à M. Miri. S.E.H, je remercie en lui le chercheur de renom qui m'a donné l'opportunité de travailler sous sa direction, je remercie en lui le directeur de thèse à l'engagement total, aux conseils avisés et aux indications toujours fructueuses, enfin je remercie en lui l'ami au soutien et à la compréhension sans limites.

Je tiens aussi à remercier M. le Professeur Abdellaoui. B, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

J'adresse à M. le Professeur Benaissa. A, l'expression de mes sincères remerciements et de mon entière gratitude, pour faire partie encore une fois de mon jury.

Je remercie chaleureusement, M. le Professeur Touaoula. T, d'avoir accepter de participer au jury qui examinera ce manuscrit.

Je prie M. le Maître de Conférences Azzouz. A, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury qui examinera cette thèse.

Je renouvelle mes remerciements à M. le Maître de Conférences ATTAR. A, pour avoir partagé son bureau avec moi, pour m'avoir fait don de quelques idées lumineuses dont il est le seul à avoir le secret, pour avoir contribué à l'enrichissement de cette thèse, mais avant tout je le remercie pour son amitié indéfectible.

J'ai une pensée toute particulière pour M. le Professeur Bouchekif. M, avec qui j'ai fait mes premières armes, c'est si peu dire que j'ai beaucoup appris à son contact ; mon seul regret, c'est d'avoir échoué à être son élève, là où lui à aisément réussi à être mon maître, qu'il trouve en ces quelques mots l'expression de ma totale reconnaissance et de mon éternelle gratitude.

Je remercie les amis ; les vrais, Amine, Mohammed et Rachid, pour leur soutien tout au long de ces années.

Je remercie ma femme Latifa, sans qui rien n'aurait été possible.

Table des matières

Préface

Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) décrit une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées partielles. Les E.D.P apparaissent fréquemment dans tous les domaines de la physique et de l'ingénierie. De plus, nous avons assisté ces dernières années à une augmentation spectaculaire de l'utilisation des E.D.P dans des domaines tels que la biologie, la chimie, l'informatique (en particulier en ce qui concerne le traitement d'images et le graphique) et en économie (finance). En fait, dans chaque domaine où il existe une interaction entre plusieurs variables indépendantes, nous essayons de définir des fonctions dans ces variables et de modéliser divers processus en construisant des équations pour ces fonctions. Lorsque la valeur de la ou des fonctions inconnues à un certain point ne dépend que de ce qui se passe au voisinage de ce point, nous obtiendrons en général une E.D.P.

L'analyse des E.D.P présente de nombreuses facettes. L'approche classique qui a dominé le XIXe siècle consistait à élaborer des méthodes permettant de trouver des solutions explicites. En raison de l'immense importance des E.D.P dans les différentes branches de la physique, tout développement mathématique permettant de résoudre une nouvelle classe d'E.D.P s'accompagnait de progrès significatifs en physique. Ainsi, la méthode des caractéristiques inventée par Hamilton a conduit à des avancées majeures en optique et en mécanique analytique. La méthode de Fourier a permis de résoudre le problème du transfert de chaleur et de la propagation des ondes, et la méthode de Green a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de la théorie de l'électromagnétisme.

Les progrès les plus spectaculaires en matière d'E.D.P ont été accomplis au cours des 50 dernières années grâce à l'introduction de méthodes numériques permettant d'utiliser des ordinateurs pour résoudre des E.D.P de tous types, en géométrie générale et dans des conditions extérieures arbitraires (du moins en théorie ; en pratique). il reste encore un grand nombre d'obstacles à surmonter). Les progrès techniques ont été suivis de progrès théoriques visant à comprendre la structure de la solution.

L'objectif est de découvrir certaines propriétés de la solution avant de la calculer, et parfois même sans solution complète. L'analyse théorique des E.D.P ne présente pas seulement un intérêt académique, mais a de nombreuses applications. Il convient de souligner qu'il existe des équations très complexes qui ne peuvent être résolues même à l'aide de supercalculateurs. Dans ces cas, tout ce que nous pouvons faire est d'essayer d'obtenir des informations qualitatives sur la solution.

En outre, une question très importante concerne la formulation de l'équation et les conditions (aux bord ou aux limites) associées. En général, l'équation provient d'un modèle de problème physique ou d'ingénierie. Il n'est pas automatiquement évident que le modèle soit cohérent en ce sens qu'il débouche sur une E.D.P pouvant être résolue.

En outre, il est souhaitable dans la plupart des cas que la solution soit unique et stable, même en présence de petites perturbations des données. Une compréhension théorique de l'équation nous permet de vérifier si ces conditions sont remplies. Comme nous le verrons dans la suite, il existe de nombreuses façons de résoudre les E.D.P, chacune étant applicable à une certaine classe d'équations. Par conséquent, il est important de procéder à une analyse approfondie de l'équation avant (ou pendant) de la résolution.

La question théorique fondamentale est de savoir si le problème constitué par l'équation et ses conditions associées est bien posé. Le mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963) a inventé la notion de bien posé. Selon sa définition, un problème est dit bien posé s'il répond à tous les critères suivants

1. **Existence** Le problème a une solution.
2. **Unicité** Il n'y a pas plus d'une solution.
3. **Stabilité** Un léger changement dans l'équation ou dans les conditions (initiales ou aux bords) entraîne un léger changement dans la solution.

Si une ou plusieurs des conditions ci-dessus ne sont pas remplies, nous affirmons que le problème est mal posé. On peut dire que les problèmes fondamentaux de la physique mathématique sont tous bien posés. Cependant, dans certaines applications d'ingénierie, nous pourrions nous attaquer à des problèmes mal posés. En pratique, ces problèmes sont insolubles.

Par conséquent, lorsque nous sommes confrontés à un problème mal posé, la première étape devrait être de le modifier de manière appropriée afin de le rendre bien posé.

Dans notre thèse on se limite aux résultats d'existence et de régularité des solutions ainsi qu'un résultat de multiplicité dans l'absence d'une méthode globale permettant la résolution des problèmes anisotropes.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil classique pour étudier des modèles qui tentent de comprendre le monde. De nombreux phénomènes dans les domaines de la physique [15, 40, 41], de la biologie [26, 50] et du traitement d'images (voir, par exemple, la monographie de Weickert [83]), sont décrits par des équations aux dérivées partielles afin de prédire le comportement qualitatif ou quantitatif et d'analyser les observations expérimentales.

Aujourd'hui, l'application de ce puissant outil a été étendue à l'étude de modèles en biologie, en finances, en technologie, et à bien d'autres domaines.

Cette thèse est dévouée à l'étude de quelques classes de problèmes elliptiques avec des conditions aux bords de type Dirichlet, associés à un opérateur anisotrope, impliquant des dérivées directionnelles avec des puissances distinctes dans un domaine borné Ω de $I\!R^N$, $N \geq 2$. La complexité de ces problèmes réside dans le fait qu'ils ne sont ni linéaires ni homogènes. En effet l'opérateur anisotrope que nous considérons dans notre étude est défini par des dérivées partielles à différents potentiels, $p_i \geq 2$, de la façon suivante :

$$-Lu := -\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right]$$

Dans les espaces de Sobolev usuels, type $H^m(\Omega)$ ou $W^{m,p}(\Omega)$, toutes les dérivées dans toutes les directions jouent un rôle identique. Ceci explique que seules les propriétés de régularité de la frontière $\partial\Omega$ du domaine jouent un rôle dans les résultats de trace ou de prolongement (voir les références classiques adams[3], lions magnes [56] et Temam [81]). Dans le cas de l'opérateur anisotrope, il a fallu ériger un cadre fonctionnel adéquat, sur mesure, chose que nous à fait l'école russe dès la première moitié du siècle précédent.

Dans cette thèse nous allons associer l'opérateur anisotrope avec une singularité non-linéaire, et montrer l'existence puis la régularité des solutions. Nous allons aussi considérer un opérateur doublement anisotrope, mettant en compétition deux opérateurs anisotropes face à une non-linéarité qui change de signe et nous montrerons un résultat de multiplicité.

Description de la thèse

Cette thèse est constituée de quatre chapitres :

Le chapitre 1 :

Ce premier chapitre est dédié à la présentation de préliminaires nécessaires pour la bonne compréhension de la thèse. Le lecteur y trouvera des résultats plus au moins connus concernant le Laplacien et le p-Laplacien, ainsi on aura un point de repère pour comprendre les résultats qui peuvent être généralisés au cas anisotrope et ceux qui ne le peuvent pas.

Un rappel des résultats classiques concernant les espaces de Sobolev usuels, et d'autres moins classiques relatifs aux espaces de Sobolev anisotropes.

Les espaces de Sobolev anisotropes sont définis comme suit :

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) \,;\, \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

et

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

dotés de la norme habituelle

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

Nous supposerons sans perte de généralité que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ alors :

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}}, \text{ pour } \overline{p} < N \text{ et } p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Nous avons l'injection de Sobolev suivante :

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \qquad \forall r \in [1, \overline{p}].$$

De plus cette injection est compacte si $r < \overline{p}^*$

En l'absence d'un principe du maximum fort dans un cadre général, nous allons parfois supposer que $p_i \geq 2$, en effet sous cette condition l'opérateur anisotrope est soumis à un principe du Maximum fort.

Nous allons également utiliser très souvent les notations suivantes

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}},\ p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Comme d'habitude, le signe " ' " désignera le conjugué algébrique ; par exemple p'_∞ est tel que

$$\frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{p'_\infty} = 1.$$

Nous rappelons les inégalités de Sobolev suivantes, nous nous référons aux premiers travaux [52], [72] et [82].

Théorème 0.1. Il existe une constante positive C, dépendant uniquement de Ω, tel que pour tout $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}^{p_N} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i}, \tag{1}$$

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}} \quad \forall r \in [1, \overline{p}^*] \tag{2}$$

et $\forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\overline{p} < N$

$$\left(\int_\Omega |v|^r \right)^{\frac{N}{\overline{p}} - 1} \leq C \prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} |v|^{t_i p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}, \tag{3}$$

pour tout r et t_j choisis de tel sorte à avoir

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\sigma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1} \\ \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Le chapitre 2 :

Dans ce chapitre on présente un résultat d'existence et de régularité pour le problème anisotrope suivant :

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^{\gamma}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où $\gamma > 0$,

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right],$$

et Ω est un domaine régulier borné dans $\mathbb{R}^N$. Nous supposerons sans perte de généralité que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue approprié $L^m(\Omega)$.

Nous procédons par approximation pour obtenir les résultats suivants :

Le cas $\gamma = 1$

Théorème 0.2. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (4) admet une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, obtenue comme limite de $\{u_n\}_n$. la suite des solutions de problèmes approximant

Théorème 0.3. Soit $f \in M^m(\Omega)$, (l'espace de Marcinkiewicz) tel que $m > \frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (4) admet une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Théorème 0.4. Soit $f \in L^m(\Omega)$, tel que $m > \frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (4) admet une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Théorème 0.5. Let $f \in L^m(\Omega)$, tel que, $\overline{p}^{*\prime} < m < \frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (4) admet une solution $u \in L^s(\Omega)$ avec $s = \dfrac{mN\overline{p}}{N - m\overline{p}}$.

Le cas $\gamma < 1$

Théorème 0.6. Soit $f \in L^1(\Omega)$ alors il existe une solution u pour (4), appartenant à $W_0^{1,(s_i)}(\Omega)$, pour tout $s_i < p_i \dfrac{N(\overline{p} - (1-\gamma)N)}{\overline{p}\,(N - (1-\gamma))}$ et appartenant à l'espace Lebesgue correspondant $L^{\overline{s}*}(\Omega)$.

Remarque 0.1. On peut donner des résultats de régularité sur les dérivées premières de la solution de la manière suivante : $\left|\partial_i u^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right| \in L^{p_i}(\Omega)$. Cela ne signifie pas que u appartient à un espace de Sobolev anisotrope, mais elle ne donne qu'une estimation des dérivés du premier ordre de u.

Le cas $\gamma > 1$

Théorème 0.7. Soit $f \in L^1(\Omega)$, alors il existe une solution u pour (4) , appartenant a l'espace $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{N(\gamma-1+\overline{p})}{N-\overline{p}}$.

Remarque 0.2. En utilisant le principe du Maximum fort, on peut obtenir l'estimation suivante :

$$C(K)\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i} \leq C,$$

pour tout compact $K \subset\subset \Omega$. On obtient ainsi une faible convergence de u_n vers u dans $W^{1,(p_i)}(\Omega_1)$, pour tout sous-ensemble ouvert $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.

Le chapitre 3 :

Ce troisième chapitre est dédié à l'étude du problème à exposent variable suivant :

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^{\gamma(x)}} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

où

$$Lu = \sum_{i=1}^{N}\partial_i\left[|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\right],$$

$\gamma(x) > 0$ est supposée être une fonction régulière, par exemple $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$, et Ω est un domaine régulier borné dans $\mathbb{R}^N$. Nous supposerons sans perte de généralité que $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue approprié $L^m(\Omega)$.

Pour δ fixé, on considère l'ensemble $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$

Nous procédons par approximation pour obtenir les résultats :

Théorème 0.8. Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N(\overline{p}-1)+\overline{p}}$ et $f \in L^s(\Omega)$, supposons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\gamma(x) \leq 1$ dans Ω_δ, alors le problème (5) possède une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Théorème 0.9. Supposons que pour $\gamma^* > 1$ et $\delta > 0$ on a $\|\gamma\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} \leq \gamma^*$. À condition que $f \in L^s(\Omega)$ avec $s = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{N(\overline{p} - 1) + \overline{p}\gamma^*}$, le problème (5) admet une solution u dans $L^\alpha(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$, appartenant a $W_{loc}^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Le chapitre 4 :

On considère dans ce chapitre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] - \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \right] = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, nous supposerons que f remplit certaines hypothèses appropriées, $1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et $1 < q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_N$.

Nous allons souvent utiliser la notation

$$L_{(p_i)}u = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right],$$

(H1) f est une fonction continue telle que $f(0) \geq 0$, et il y a $0 < a_1 < b_1 < a_2 < ... < b_{m-1} < a_m$ les zéros de f tel que

$$\begin{cases} f \leq 0 & \text{dans } (a_k, b_k) \\ f \geq 0 & \text{dans } (b_k, a_{k+1}) \end{cases}$$

(H2) $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt > 0; \ \forall k = 1, 2, .., m-1.$

Lemme 0.1. Soit $g \in C(\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $s_0 > 0$ tel que

$$g(s) \geq 0 \quad \text{si } s \in (-\infty, 0)$$
$$g(s) \leq 0 \quad \text{si } s \in [s_0, +\infty)$$

alors si u est une solution de

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] - \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \right] = \lambda g(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

elle vérifie $u \geq 0$ presque partout dans Ω, $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_{L^\infty} < s_0$.

Pour tout $k = 1, 2, .., m-1$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] - \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] & = \lambda f_k(u) \quad \text{dans } \Omega \\ u & = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

où

$$f_k(s) = \begin{cases} f(0) & \text{si } s \leq 0 \\ f(s) & \text{si } 0 \leq s \leq a_k \\ 0 & \text{si } s > a_k \end{cases}$$

Proposition 0.1. Il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, +\infty)$, le problème (8) possède une solution non-négative $u = u_{k,\lambda}$ tel que $\|u_k\|_{L^\infty} \leq a_k$.

Théorème 0.10. Il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, +\infty)$, le probème (6) possède au moins $(m-1)$ solutions non-négative u_i tel que $u_i \in X$ et $a_i \leq \|u_i\|_{L^\infty} \leq a_{i+1}$.

Remarque 0.3. Évidemment, et sous les mêmes conditions sur f, tous les résultats obtenus ici sont toujours valables pour le problème simplement anisotrope suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] & = \lambda f(u) \qquad \text{dans } \Omega, \\ u & = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Nous présentons quelques outils d'analyse non-linéaire qui seront utilisés au cours de cette thèse. Notons que l'on va étudier des problèmes "elliptiques anisotropes" et "doublement anisotropes", nous allons donc subdiviser ce chapitre en trois sections :

Dans la première section nous faisons appel à des résultats de base, comme les notions des espaces de Sobolev et quelques résultats de compacité d'usage important.

Dans la deuxième section nous rappelons brièvement le cadre analytique fonctionnel de l'opérateur que nous allons étudier et aux outils nécessaires pour étudier les problèmes elliptiques, comme le Principe du Maximum, de comparaison etc ...

Enfin la dernière section sera consacrée à quelques inégalités pratiques liées à nos problèmes.

1.2 Quelques outils dans les espaces de Sobolev

Dans les espaces de Sobolev usuels, type $H^m(\Omega)$ ou $W^{m,p}(\Omega)$, toutes les dérivées dans toutes les directions jouent un rôle identique. Ceci explique que seules les propriétés de régularité de la frontière $\partial\Omega$ du domaine jouent un rôle dans les résultats de trace ou de prolongement (voir les références classiques [3], [56] et [81]). Dans certains domaines de la physique, on rencontre des équations aux dérivées partielles qui amènent à travailler dans des espaces fonctionnels ou seules les dérivées partielles dans certaines directions jouent un rôle privilégié. C'est notamment le cas des approximations par-axiales de l'équation des ondes (voir [9] ou des équations de Stokes [44]).

Nous commençons par rappeler la notion d'espaces de Sobolev anisotropes. Ces espaces ont été introduits et étudiés par Nikolskii [72] Slobodeckii [78] et Troisi [82], puis par Trudinger [48] dans le cadre des espaces d'Orlicz.
Généralement les techniques variationnelles pour les E.D.P consistent à écrire l'E.D.P sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle J définie sur des espaces fonctionnels convenables - que l'on introduira par la suite - les solutions obtenues dans ce sens-là, sont dites solutions au sens faible ou parfois solutions au sens de dualité.

Définition 1.1. Soit m un nombre positif. L'espace de Marcinkiewicz $M^m(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f tel que

$$meas\{x \in \Omega, |f(x)| > k\} \leq \frac{c}{k^m}, pour\ tout\ k > 0$$

avec un constante $c > 0$. Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|^m = Inf\{c > 0, \text{telle que l'inégalité précédente est vérifiée}\}.$$

Si en plus Ω est de mesure finie nous avons, pour chaque $\varepsilon > 0$

$$L^m(\Omega) \subset M^m(\Omega) \subset L^{m-\varepsilon}(\Omega).$$

Définition 1.2. Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega);\ \text{tels que}\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\ \text{pour tout}\ i = 1...N\}.$$

Il est clair que $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)},$$

ou bien la norme équivalente :

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}\ \ (\text{si}\ \ 1 \leq p < +\infty)$$

Si $p = +\infty$, la norme de l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u| .$$

Si $p = 2$, alors $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} .$$

Définition 1.3. Soit $1 \leq p < \infty$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif si $1 < p < \infty$.

Lorsque $\Omega = I\!R^N$, on sait que $C_0^1(I\!R^N)$ est dense dans $W^{1,p}(I\!R^N)$, et par conséquent

$$W_0^{1,p}(I\!R^N) = W^{1,p}(I\!R^N).$$

Si Ω est borné alors en utilisant l'inégalité de Poincaré, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme équivalente :

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.4. ([51]) Soient X un espace de Banach et ω une partie de X. Une fonction $J : \omega \to \mathbb{R}$ est dite **faiblement séquentiellement s.c.i.** si pour toute suite $(x_n)_n$ de ω convergeant faiblement vers $x \in \omega$ on a

$$J(x) \leq \liminf_{n \to \infty} J(x_n).$$

On peut montrer que, dans les espaces de Banach réflexifs, les fonctions faiblement séquentiellement s.c.i. atteignent leur minimum, pourvu qu'elles tendent vers $+\infty$ à l'infini.

Proposition 1.1. Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \to R$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que

$$\|x_n\| \to \infty \text{ on a } J(x_n) \to +\infty.$$

Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e.

$$\exists u \in K, \qquad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

Démonstration. En effet si $\alpha := \inf_{v\in K} J(v)$ et $(u_n)_n$ est une suite minimisante, du fait que J tend vers l'infini à l'infini, $(u_n)_n$ est bornée. Comme X est réflexif, il existe une sous-suite $(u_{n_i})_i$ et $u \in X$ tels que $u_{n_i} \to u$ dans $X-$faible ; K étant un convexe fermé, il est faiblement fermé et $u \in K$. Finalement :

$$\alpha \leq J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_{n_i}) = \alpha$$

car J est faiblement séquentiellement s.c.i. Ainsi $\alpha = J(u) \in \mathbb{R}$ et J atteint son minimum en $u \in K$. □

De la même façon on définit les espaces de Sobolev anisotropes comme suit :

1.2.1 Espace de Sobolev Anisotropes

Définition 1.5. Soit Ω un ouvert de $I\!R^N$, les espaces de Sobolev anisotropes sont définis comme suit :

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) ; \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

et

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

dotés de la norme habituelle

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

Nous supposerons sans perte de généralité que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ alors :

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}}, \text{ pour } \overline{p} < N \text{ et } p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Nous avons l'injection de Sobolev suivante :

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \qquad \forall r \in [1, \overline{p}].$$

De plus cette injection est compacte si $r < \overline{p}^*$

En l'absence d'un principe du Maximum fort, nous allons souvent supposer $p_i \geq 2$

Nous allons également utiliser très souvent les notations suivantes

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N - \overline{p}}, \; p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Comme d'habitude, le signe " ' " désignera le conjugué algébrique, c'est par exemple p'_∞ est tel que

$$\frac{1}{p_\infty} + \frac{1}{p'_\infty} = 1.$$

1.2.2 La condition de Palais-Smale

L'espace de départ de la fonctionnelle dont on cherche un point col est l'espace de Sobolev anisotrope, que l'on note $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Nous introduisons dans ce qui suit la condition de Palais-Smale, une hypothèse importante du lemme du col.

Définition 1.6. (Condition de Palais-Smale)

Soit E un espace de Banach et $J : E \longrightarrow I\!R$ de classe C^1. on dit que J vérifie la condition de Palais-Smale au niveau c si de toute suite u_n de E tel que

$$J(u_n) \longrightarrow c \;\text{ dans } I\!R \text{ et } J'(u_n) \longrightarrow 0 \;\text{ dans } E',$$

alors, on peut extraire une sous suite convergente.

Théorème 1.1. (Lemme du col)

Soit J une fonctionnelle de classe $C^1(E,R)$ vérifiant la condition de Palais-Smale au niveau c, et telle que :

- $J(0)=0$.
- Il existe $\rho>0$ et $\alpha>0$ tels que $J(u)\geq\alpha>0$, pour tout $u\in E$, avec $\|u\|_E=\rho$.
- Il existe $v\in E$, $\|v\|_E>\rho$, tel que $J(v)<a$.

Alors J admet une valeur critique $c\geq a$ où

$$c:=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\gamma(t)),$$

et

$$\Gamma:=\{\gamma\in C([0,1];E),\gamma(0)=0,\gamma(1)=u_0\}.$$

Nous rappelons les inégalités de Sobolev suivantes, nous nous référons aux premiers travaux [52], [72] and [82].

Théorème 1.1. Il existe une constante positive C, dépendant uniquement de Ω, tel que pour tout $v\in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, on a

$$\|v\|^{p_N}_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}\leq C\sum_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}, \tag{1.1}$$

$$\|v\|_{L^r(\Omega)}\leq C\prod_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|^{\frac{1}{N}}_{L^{p_i}(\Omega)}\quad \forall r\in[1,\overline{p}^*] \tag{1.2}$$

et $\forall v\in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, $\overline{p}<N$

$$\left(\int_\Omega |v|^r\right)^{\frac{N}{\overline{p}}-1}\leq C\prod_{i=1}^{N}\left(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}|v|^{t_ip_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}, \tag{1.3}$$

pout tout r et t_j choisis de telle sorte à avoir

$$\begin{cases}\frac{1}{r}=\frac{\sigma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1}\\ \sum_{i=1}^{N}\sigma_i=1.\end{cases}$$

Parmi une vaste littérature existante traitant des problèmes anisotropes et des problèmes elliptiques à terme singulier, on citera par exemple [16], [24], [27], [36], [23], [45], [68], [69] et [75].

Définition 1.7. On suppose que Ω, est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N\geq 3$

Soit $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue approprié $L^m(\Omega)$.

On présente maintenant un résultat très important dans l'étude des E.D.P elliptiques c'est le théorème de **Rellich-Kondrachov** qui montre l'injection entre les espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et certains espaces de Lebesgue, ce résultat de compacité est un outil fort dans l'étude des E.D.P qui nous permet de passer d'un espace de Sobolev à un espace de Lebesgue.

Théorème 1.2. Rellich-Kondrachov Soit Ω un domaine borné de $I\!R^N$ tel que Ω est de classe C^1,

- Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ avec $p^* = \frac{pN}{N-p}$.
- Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
- Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

Si on remplace l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors les injections précédentes sont vérifiées indépendamment de la régularité du domaine Ω.

Il est parfois pratique de se placer dans l'espace de Sobolev $\mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)$ défini comme la complétude de $\mathcal{C}_0^\infty(I\!R^N)$ par rapport à la norme suivante :

$$||\phi||_{\mathcal{D}^{1,p}(I\!R^N)} = \Big(\int_{I\!R^N} |\nabla \phi|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On renvoie le lecteur aux ouvrages [3] et [62] pour plus de détails sur la notion des espaces de Sobolev et leurs propriétés.

La notion de troncature est une notion très importante dans l'étude des E.D.P avec donnée dans L^1 ou bien mesure. Cette notion est basée sur l'usage des fonctions $T_k(s)$ et $G_k(s)$, $k > 0$, définies par :

$$T_k(s) = \begin{cases} s\,, & \text{si} |s| \leq k\,; \\ k\frac{s}{|s|}\,, & \text{si } |s| > k\,; \end{cases}$$

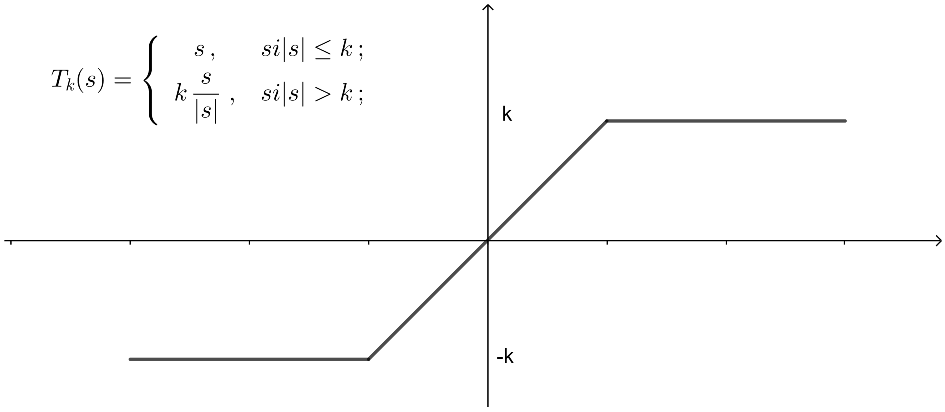

FIGURE 1.1 – La troncature

La fonction $G_k(s) = s - T_k(s)$ est représentée comme suit :

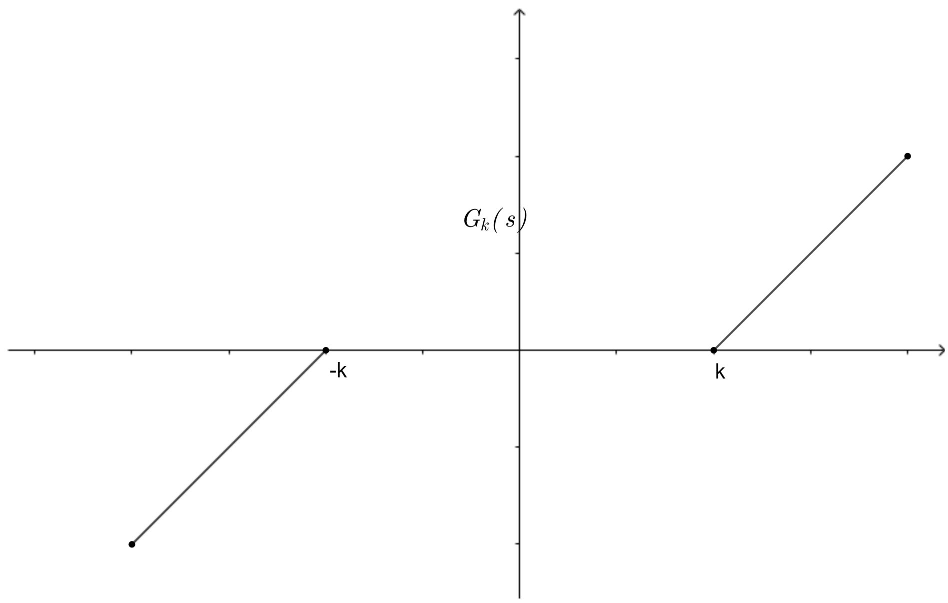

Figure 1.2 – La fonction $G_k(s)$

Une autre fonction sera très utile par la suite est la suivante :$\varphi_{k-1} = T_1(G_{k-1}(u))$

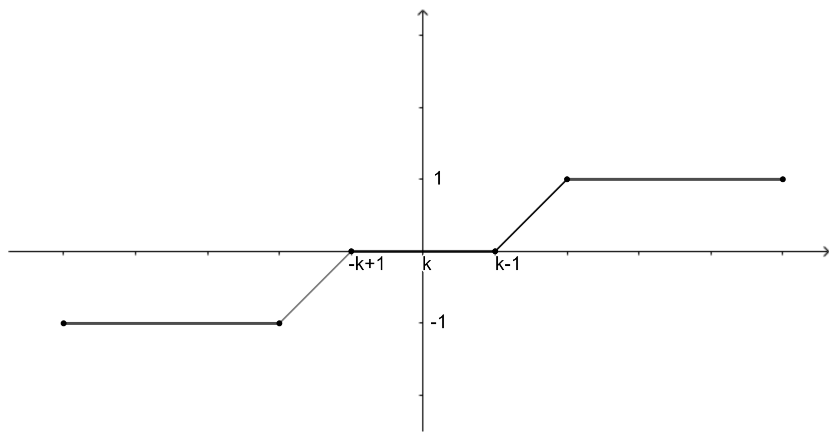

Figure 1.3 – La fonction $T_1(G_k(s))$

Comme conséquence, on peut définir les espaces intermédiaires suivants :

Définition 1.8. Soit Ω un sous ensemble de $I\!\!R^N$, on définit

1. $\tau_{loc}^{1,1}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $k > 0$, $T_k(u) \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$.
2. Pour $p \in]1, \infty[$, $\tau_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau_{loc}^{1,1}(\Omega)$ composé des fonctions u telles que $|\nabla(T_k(u))| \in L_{loc}^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

3. De même, $\tau^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$ composé des fonctions u, telles que, de plus $|\nabla T_k(u)| \in L^p(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

4. Enfin, $\tau_0^{1,p}(\Omega)$ est le sous ensemble de $\tau^{1,p}(\Omega)$, composé des fonctions qui peuvent être approchées par des fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω dans le sens suivant : une fonction $u \in \tau^{1,p}(\Omega)$ appartient à $\tau_0^{1,p}(\Omega)$, si pour tout $k > 0$, il existe une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tels que

$$\phi_n \to T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega),$$

$$\nabla\phi_n \to \nabla T_k(u) \qquad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

Il est clair que pour tout $p \in [1, \infty[$, on a

1. $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subset \tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad W_0^{1,p}(\Omega) \subset \tau_0^{1,p}(\Omega)$.
2. $\tau^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) = W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$.
3. $\nabla T_k(u) = \nabla u\, \chi_{\{|u|<k\}}$, où χ_A désigne la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$.

Notons que si $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, alors ∇u n'est pas défini même au sens des distributions, pourtant on a le lemme suivant qui donne un sens à ∇u,

Lemme 1.1. Soit $u \in \tau^{1,1}_{loc}(\Omega)$, il existe une unique fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ mesurable unique telle que

$$\nabla T_k(u) = v\, \chi_{\{|u|<k\}} \qquad p.p. \tag{1.4}$$

En outre, $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, et alors $v \equiv \nabla u$ dans le sens faible habituel.

Pour étudier les EDP elliptiques avec données non régulières on va procéder généralement par approximation et après on passe à la limite en utilisant des résultats de compacité appropriés. L'un des résultats les plus importants et qui sera utilisé fréquemment est celui de la régularité de Baras-Pierre dont la preuve se trouve dans [8].

Lemme 1.2. Supposons que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\Delta u \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors pour tout $p \in [0, \frac{N}{N-1})$, et pour Ω_1 et Ω_1 tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega$, il existe une constante positive

$C \equiv C(p, \Omega_1, \Omega_2, N)$ telle que

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega_1)} \leq C \int_{\Omega_2} (|u| + |\Delta u|) dx. \tag{1.5}$$

De plus, si $u \in L^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1(\Omega)$, alors l'estimation ci dessus à lieu globalement dans le domaine Ω.

Rappelons que dans notre travail, le lemme de Vitali a une importance capitale. Avant de l'énoncer on a besoin de quelques définitions.

Définition 1.9. (Equi-Intégrabilité dans L^p) Soit X un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ est equi-intégrable **ssi :** pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $E \subset X$ avec $|E| < \delta$, on a pour tout

$$\int_E |f_n(x)|^p dx \leq \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

On présente ici le Lemme suivant qui sera très utile pour montrer les résultats d'existence.

Théorème 1.3. (Théorème de Vitali) Soit X un ensemble de mesure finie pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$ qui verifie les deux conditions suivantes :

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-partout vers f dans X.
2. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est equi-intégrable.

Alors, $\{f_n\}_n$ converge fortement vers f dans $L^1(X)$.

1.3 Notions de base sur les problèmes elliptiques

Comme nous allons considérer des problèmes avec des structures non variationnelles ou bien avec des données non régulières, on se doit de spécifier le sens de notre solution.

Définition 1.10. On dit que u est une solution distributionnelle de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= F(u) \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Si $|\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $F(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \, dx = \int_\Omega F(u) \phi \, dx. \tag{1.7}$$

Dans le cas où $F(u) \in L^1(\Omega)$, on peut utiliser la notion des solutions entropiques défini comme suit :

Définition 1.11. Soit $F \in L^1(\Omega)$ et u une fonction mesurable sur Ω. On dit que u est une solution entropique de (1.6) si $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ et pour tout $k > 0$ et pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla (T_k(u-v)) \rangle \, dx = \int_\Omega F \, T_k(u-v) \, dx. \tag{1.8}$$

Rappelons que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. On utilise le résultat suivant

Théorème 1.4. Soit $F \in L^1(\Omega)$, alors le problème (1.7) admet une unique solution entropique u telle que $|u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-p}$ et $|\nabla u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Si $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.

Pour traiter le cas d'une mesure de Radon générale, on ne peut pas utiliser le concept de la solution entropique car le terme $\int_\Omega T_k(u-v) \, d\mu$ n'est pas en général défini. Dans ce cas, nous avons besoin de la notion de la solution renormalisée. Nous commençons par quelques préliminaires de la théorie de la capacité elliptique.

Définition 1.12. Si $U \subset \Omega$ est un ensemble ouvert, nous définissons

$$Cap_{1,p}(U) = \inf \left\{ \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ u \geq \chi_U \text{ presque partout dans } \Omega \right\}$$

(nous allons utiliser la convention que $\inf \emptyset = +\infty$), alors pour tout sous ensemble Borélien $B \subset \Omega$, on pose

$$\mathrm{Cap_{1,p}(B)} = \inf \left\{ \mathrm{Cap_{1,p}(U)}, \ \mathrm{U \text{ un sous ensemble ouvert de } \Omega, B \subset U} \right\}.$$

Soit maintenant μ une mesure de Radon sur Ω. Nous dirons que μ est concentrée sur un sous ensemble Borélien E de Ω, si pour tout ensemble Borélien B, on a $\mu(B) = \mu(B \cap E)$. Notons que $\mathrm{Cap_{1,p}}$ est une mesure extérieure, donc on peut utiliser la décomposition de Radon-Nikodym. Plus précisément on à la définition suivante.

Définition 1.13. Une mesure μ_0 est dite absolument continue par rapport à la $\mathrm{Cap}_{1,\mathrm{p}}$, si $\mu(B) = 0$ pour chaque $B \subset \Omega$ tel que $\mathrm{Cap}_{1,\mathrm{p}}(\mathrm{B}) = 0$.

Définition 1.14. Soit μ est une mesure de Radon positive dans Ω. On dit que μ est singulière par rapport à la capacité $\mathrm{Cap}_{1,\mathrm{p}}$ si elle est concentrée sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$, tel que $\mathrm{Cap}_{1,\mathrm{p}}(\mathrm{E}) = 0$. On note l'ensemble des mesures positives singulières par $\mathcal{M}_s$.

Comme conséquence de la décomposition de Radon-Nikodym, on a la proposition suivante :

Proposition 1.2. Toute mesure de Radon μ à variation bornée dans Ω se décompose d'une manière unique $\mu = \mu_0 + \mu_s$, μ_0 étant absolument continue par rapport à la $Cap_{1,p}$ et μ_s singulière par rapport à la $Cap_{1,p}$. En outre $\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ où $W^{-1,p'}(\Omega)$ est le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Voir [13] pour la preuve. On est en mesure maintenent de donner la définition de la solution renormalisée.

Définition 1.15. Soit μ, une mesure de Radon à variation bornée. Une fonction mesurable u est dite solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall k,$; et pour toute fonction continue φ dans Ω on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \le u \le 2n\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^+,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n \le u \le -n\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu_s^-,$$

et pour toute fonction $h \in W^{1,\infty}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$ et pour toute fonction $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \bigcap L^\infty(\Omega)$, telles que $\varphi h(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega h(u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega h'(u) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \varphi dx = \int_\Omega \varphi h(u) d\mu_0.$$

$\mu \in M(\bar{\Omega})$ peut être décomposée en $\mu = \mu_0 + \mu_s^+ - \mu_s^-$ où μ_0 est une mesure qui ne change pas les ensembles de $p-$capacités nulles $\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ et μ_s^+ et μ_s^- les parties positives et négatives de $\mu - \mu_0$.

D'après [61], on a le résultat d'existence suivant.

Théorème 1.5. Soit μ une mesure de Radon à variation bornée, alors le problème (1.9) admet une solution renormalisée u telle que $|u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-2}$ et $|\nabla u|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma < \frac{N}{N-1}$. Si de plus $p > 2 - \frac{1}{N}$, alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.

Remarque 1.1. Dans le cas où $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$, alors la notion de solution entropique est confondue avec la notion de solution renormalisée, dans ce cas on a l'existence et l'unicité de la solution. Dans le cas géneral, l'unicité de la solution renormalisée reste un problème ouvert.

1.3.1 Les principes du Maximum et de comparaison

L'une des méthodes les plus utilisées dans la résolution des E.D.P de type elliptique et parabolique est la méthode de sous-sur solution. Cette méthode trouve son origine dans les théorèmes de point fixe et les algorithmes d'itérations. En général, dans la théorie des E.D.P, cette méthode est fortement liée au principe du Maximum et aux résultats de comparaison. Une généralisation importante du principe du Maximum a été obtenue par Brezis-Cabré dans le lemme suivant dont la preuve se trouve dans [20].

Lemme 1.3. Supposons que $h \geq 0$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Soit v la solution de

$$\begin{cases} -\Delta v &= h \quad \text{dans } \Omega \\ \quad v &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Alors,

$$\frac{v(x)}{\delta(x)} \geq c \int_\Omega h\delta \qquad \forall x \in \Omega,$$

où $c > 0$ est une constante qui depend seulement de Ω et $\delta = dist(x, \partial\Omega)$.

Il existe une version générale pour les opérateurs quasi-linéaires introduite par Abdellaoui-Peral dans [2].

Lemme 1.4. Soit u l'unique solution positive de problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

où $f \geq 0$ appartient à $L^\infty(\Omega)$. Alors pour toute boule $B_r \subset \Omega$ telle que $\bar{B}_{4r} \subset \Omega$, alors il existe une constante positive $c \equiv c(r, N, p)$ Alors,

$$\frac{u^{p-1}(x)}{\delta^{p-1}(x)} \geq c \int_{B_{2r}} f(y)dy \qquad \forall x \in \Omega,$$

où $\delta = dist(x, \partial\Omega)$.

Le principe de compaison suivant sera souvent utilisé par la suite.

Théorème 1.6. Principe de comparaison Soit f une fonction positive, continue telle que $\dfrac{f(x,s)}{s^{p-1}}$ est décroissante pour $s > 0$ où $1 < p$. Si $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sont telles que

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(x,u), & u > 0 \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_p v \leq f(x,v), & v > 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

Alors $u \geq v$ dans Ω.

1.4 Quelques inégalités pratiques

Dans cette dernière section, on va présenter quelques inégalités pratiques qui seront utilisées dans cette thèse et qui sont liées à la nature des problèmes en considération, comme l'inégalité de Hardy-Sobolev dans différents domaines et avec différents poids.

Théorème 1.7. Soit $1 < p < N$ alors pour tout $1 < q < p$, il existe une constante positive $C \equiv C(N, p, q, \Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^p dx - \Lambda_{N,p} \int_\Omega \frac{|\varphi|^p}{|x|^p} dx \geq C \Big(\int_\Omega |\nabla\varphi|^q dx \Big)^{\frac{p}{q}}, \text{ pour tout } \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

Dans le cas où le poids $|x|^p$ est substitué par $(\delta^p(x) \equiv \text{dist}(x, \partial\Omega))^p$, alors on a une nouvelle version de l'inegalité de Hardy-Sobolev, plus précisément on a le théorème suivant : (l'inégalité de Hardy-Sobolev avec poids suivante sera utilisée pour avoir quelques estimations a priori locales, on se réfère à [53] pour la preuve).

Théorème 1.8. (*L'inégalité de Hardy-Sobolev pondérée*) Soit Ω un domaine régulier de $I\!R^N$ et soit $\delta^\sigma(x) \equiv (\text{dist}(x, \partial\Omega))^\sigma$ où $\sigma \leq 1$, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

1. Si $\sigma < 1$, il existe une constante positive C dépendant seulement de N, Ω et σ telle que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$C \int_\Omega \phi^2 \delta^{\sigma-2}(x)dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \delta^\sigma(x)dx \tag{1.13}$$

2. Si $\sigma = 1$, alors pour tout $R > 0$ tel que $\Omega \subset\subset B_R(0)$, il existe une constante positive C dépendant seulement de N, R et Ω tel que pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on a

$$C \int_\Omega \frac{\phi^2}{\delta(x)(\log(\frac{R}{\delta(x)}))^2} dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi|^2 \delta(x)dx \tag{1.14}$$

Notons que dans le cas où $\sigma = 0$, le comportement de l'inégalité de Hardy avec le poids $\delta^2(x)$ est différent par rapport au comportement de l'inégalité de Hardy avec le poids $|x|^2$ au sens que l'inégalité de Hardy avec le poids $\delta^2(x)$ est fortement liée à la géométrie du domaine Ω et la constante optimale est atteignable dans quelques cas particulier. (Voir [21] pour plus de détails). Comme conséquence des inégalités précédentes on a *L'inégalité de Poincaré pondérée*, voir [6] pour des résultats plus généraux.

1.5 Introduction aux problèmes anisotropes

Dans cette section et dans les suivantes, nous présentons quelques résultats qui peuvent être retrouvés avec plus de détails dans la thèse de Agnese Di Castro [33]. Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

Nous donnerons quelques résultats concernant l'existence et la régularité de solutions faibles ou distributionnelles de (1.15), où f est une fonction donnée appartenant à un espace de Lebesgue.

Maintenant et dans ce qui suit, on suppose que $p < N$, sinon le problème est plus simple, car $W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, est valable pour tout $r \in [1, \overline{p}^*]$.

Nous savons, par une simple modification du théorème classique de Leray-Lions (voir [55] et aussi boccardo-marcellini [34]), grâce aux injections anisotropes de Sobolev, que si $f \in L^m(\Omega)$, avec $m \geq p'_\infty$ et

$$p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}, \; p_N = \max_i \{p_i\}, \; \overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}}, \text{ et} \frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i}, \tag{1.16}$$

il existe une solution faible à notre problème, $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ tel que

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega). \tag{1.17}$$

puisque

$$M^m(\Omega) \subset L^{m-\varepsilon}(\Omega) \quad \forall m > 1 \quad \text{et} \quad 0 < \varepsilon \leq m-1, \tag{1.18}$$

on obtient également l'existence d'au moins une solution faible de (1.15) lorsque $f \in M^m(\Omega)$ avec $m > p'_\infty$,

Considérons maintenant $p_\infty = \overline{p}^*$, alors on a les résultats suivants :

Théorème 1.2. Soit $f \in L^m(\Omega)$
i) Si $m > \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible borné $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ pour le problème (1.15)
ii) Si $m = \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible u pour le problème (1.15) et une constante $\beta > 0$ tel que

$$\int_\Omega e^{\beta|u|} < \infty.$$

iii) Si $(\overline{p}^*)' \leq m < \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible u pour le problème (1.15) apparetenant a $L^s(\Omega)$, avec

$$s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p} + \overline{p}^* - m\overline{p}^*} = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N - m\overline{p}}.$$

Remarque 1.2. i) et ii) sont une conséquence directe de i) et ii) du théorème 1.6 de la section suivante, grâce à la propriété suivante des espaces de Lebesgue

$$L^m(\Omega) \subset M^m(\Omega) \qquad \forall m > 1.$$

Remarque 1.3. Notons que le résultat ii) implique que la solution faible u de (1.15), appartient à $L^s(\Omega)$, pour $1 \leq s < +\infty$.
Dans le cas où $p_\infty = p_N = \max_i \{p_i\}$ on a le théorème suivant

Théorème 1.3. Soit $f \in L^m(\Omega)$

i) Si $m > \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible borné $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ pour le problème (1.15)

ii) Si $m = \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible u pour le problème (1.15) et une constante $\beta > 0$ tel que

$$\int_\Omega e^{\beta|u|} < \infty.$$

iii) Si $\frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)} \leq m < \frac{N}{p}$ alors il existe une solution faible pour le problème (1.15) appartenant à $L^s(\Omega)$, tel que

$$s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p} + \overline{p}^* - m\overline{p}^*} = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N - m\overline{p}}.$$

iv) Si $p_N' \leq m < \frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)}$, alors il existe une solution faible pour le problème (1.15) appartenant à $L^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $\tilde{s} = m(p_N - 1)$.

Remarque 1.4. Notons que, puisque $p_N > \overline{p}^*$,

$$\frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)} > (\overline{p}^*)' > p_N',$$

et

$$\tilde{s} = m(p_N - 1) > s = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N - m\overline{p}} \Longleftrightarrow m < \frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)}, \tag{1.19}$$

une meilleure sommabilité de u peut être obtenue, si $(\overline{p}^*)' < m < \frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)}$, et un nouveau résultat si $p_N' < m < (\overline{p}^*)'$. Alors que si $(\overline{p}^*)' < m < p_N' < \frac{N}{\overline{p}}, (p_N < \overline{p}^*)$ donc la relation (1.19) n'est pas vérifiée, nous n'améliorons donc pas la sommabilité de u, obtenue dans le théorème 1.2

Remarque 1.5. Soit $\tilde{s} = m(p_N - 1) > p_N$, puisque $m > p_N'$. Par conséquent, nous améliorons la régularité, déjà connue par les intégrations, de la solution faible de notre problème.

Remarque 1.6. On souligne qu'il y a une continuité dans les résultats de sommabilité. En fait, si $p_N = \overline{p}^*$, $m = (\overline{p}^*)'$, on a :

$$\tilde{s} = (\overline{p}^*)'(\overline{p}^* - 1) = \overline{p}^*$$

et c'est le même exposant qui apparaît dans iii) du théorème 1.2, avec $m = (\overline{p}^*)'$.

Remarque 1.7. Bien évidemment, le cas iv) du théorème 1.3 est nouveau car l'opérateur est anisotrope. Si c'est isotrope, $p_N = \overline{p} = p$ et $p < p^*$. En outre

$$\frac{mN\left(p_N - \overline{p}\right)}{\overline{p}\left(p_N - 1\right)} = 0,$$

comme prévu.

Remarque 1.8. Il est possible de prouver que si $f \in L^m(\Omega)$, avec $m \geq p'_\infty$, la solution faible du problème (1.15) est unique en raison de la propriété monotone des opérateurs anisotropes telle que (I.1). Si nous supposons que deux solutions u_1 et u_2 existent, nous avons

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 \partial_i v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2 \partial_i v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

Maintenant, prenons $v = u_1 - u_2$ comme fonction test dans les deux cas. Notons qu'un tel choix est possible puisque $u_1, u_2 \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. Ensuite, en soustrayant les deux expressions, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left[|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2\right] \partial_i \left[u_1 - u_2\right] = 0.$$

Alors, si $p_i \geq 2$ pour tout $i = 1, 2, ..., N$,

$$\int_\Omega \left[|\partial_i u_1|^{p_i-2} \partial_i u_1 - |\partial_i u_2|^{p_i-2} \partial_i u_2\right] \partial_i \left[u_1 - u_2\right] \geq C_0 \left|\partial_i \left(u_1 - u_2\right)\right|^{p_i} \qquad \forall i.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\partial_i \left(u_1 - u_2\right)\right|^{p_i} \leq 0,$$

cela implique $u_1 = u_2$. Une légère modification est nécessaire pour obtenir le même résultat avec $p_i < 2$.

Remarque 1.9. Notons que dans ces résultats nous n'avons pas besoin de supposer que $\overline{p}^* > p_N$, grâce aux injections prouvées dans [42]. Ce fait ne contredit pas le contre-exemple dans [60] (voir aussi [47]). En fait, dans le document cité, il est montré que le problème (1.15) avec $f = 0$ peut avoir des solutions faibles non bornées, mais le contre-exemple ne s'applique pas dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

On considère maintenant toujours le même problème de Dirichlet (1.15), mais :

– Si $m < p'_\infty$. L'existence d'une solution de distribution $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, telle que,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \phi = \int_\Omega f\phi \qquad \forall \phi \in C_0^1(\Omega). \tag{1.20}$$

– Si $p_\infty = \overline{p}^*$, on a le théorème suivant .

Théorème 1.4. Soit $f \in L^m(\Omega)$.

i) Si $m = 1$, , alors il existe une solution distributionnelle u pour (1.15), appartenant à $W_0^{1,s_i}(\Omega)$, avec

$$1 < s_i < p_i \frac{mN(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-m)} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., N.$$

ii) Si $1 < m < (\overline{p}^*)'$, alors il existe une solution distributionnelle u pour (1.15), appartenant à $W_0^{1,s_i}(\Omega)$, avec

$$1 < s_i = p_i \frac{mN(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-m)} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., N.$$

Démonstration. voir thèse de Di Castro [33] □

Remarque 1.10. Puisque $s_i > 1$, pour tout $i = 1, ..., N$, on en déduit que :

$$\overline{p} > 2 - \frac{1}{N}$$

dans i) et ii)

$$\overline{p} = 1 + \frac{1}{m^*}$$

Rappelons maintenant le cas classique, c'est-à-dire $p_i = p$ pour tout i.

Remarque 1.11. Notons aussi dans ce cas que puisque $\overline{p}^* \geq p_N$

$$\frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)} < (\overline{p}^*)'$$

et

$$\frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)} > 1 \iff p_N > \frac{\overline{p}(N-1)}{N - \overline{p}} = \frac{(N-1)}{N}\overline{p}^*.$$

On peut donc améliorer le théorème précédent si $\dfrac{\overline{p}\,(N-1)}{N-\overline{p}} < p_N \leq \overline{p}^*$ et $1 < m < \dfrac{N\,(p_N-\overline{p})}{\overline{p}\,(p_N-1)}$.

En effet, nous avons une solution au sens des distributions de (1.15) appartenant à $W_0^{1,\tilde{s}_i}(\Omega)$, avec $1 < \tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p_N'}$ pour tout $i = 1, ..., N$ et par restriction sur m, on obtient

$$p_i \frac{m}{p_N'} > p_i \frac{mN\,(\overline{p}-1)}{\overline{p}\,(N-m)}, \qquad \forall i = 1, ..., N \Longleftrightarrow m < \frac{N\,(p_N-\overline{p})}{\overline{p}\,(p_N-1)}. \tag{1.21}$$

Aussi dans le cas où $\tilde{s}_i > 1$, on a les conditions suivantes sur $\overline{p}$

$$\overline{p} > \frac{p_N'}{m}.$$

De plus si $f \in L^1(\Omega)$, $u \in W_0^{1,\tilde{s}_i}(\Omega)$, pour tout

$$\tilde{s}_i < \frac{p_i}{p_N'} \quad \text{et} \quad \overline{p} > p_N', \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Dans le cas $p_\infty = p_N$, on a le théorème suivant

Théorème 1.5. Soit $f \in L^m(\Omega)$,

i) Si $m = 1$, , alors il existe une solution distributionnelle u pour (1.15), appartenant à $W_0^{1,\tilde{s}_i}(\Omega)$, avec

$$\tilde{s}_i < \frac{p_i}{p_N'} \text{ et } \overline{p} > p_N', \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., N.$$

ii) Si $1 < m < (\overline{p}^*)'$, alors il existe une solution distributionnelle u pour (1.15), appartenant à $W_0^{1,s_i}(\Omega)$, avec

$$\tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p_N'} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., N.$$

Remarque 1.12. On note que, si $1 \leq m < p_\infty'$, la solution au sens des distributions peut ne pas être unique. En effet, déjà dans le cas isotrope et linéaire, la solution n'est pas unique (voir le contre-exemple présenté dans J. serrin[76]). Mais il est possible d'étendre, de manière naturelle (voir [11]), la définition de solutions d'entropie du problème (1.15), (voir [33] Section 1.6), pour obtenir un résultat d'existence sans autre hypothèse sur p et avoir l'unicité de la solution.

1.6 Résultats dans les espaces Marcinkiewicz

Dans cette section, nous présentons quelques résultats concernant le cas de f appartenant à un espace de Marcinkiewicz, $M^m(\Omega)$. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous savons, par une simple modification du théorème classique de Leray-Lions, que si $f \in M^m(\Omega)$, avec $m > p'_\infty$ il existe une solution faible, comme dans (1.17), du problème (1.15), dû à (1.18). Nous commençons par considérer le cas $p_\infty = \overline{p}^*$, où p_∞ et $\overline{p}^*$ sont comme dans (1.16). Nous avons les résultats suivants.

Théorème 1.6. Soit $f \in M^m(\Omega)$.
i) Si $m > \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible borné u pour le problème (1.15)
ii) Si $m = \frac{N}{p}$, alors il existe une solution faible u pour le problème (1.15) et une constante $\beta > 0$ tel que

$$\int_\Omega e^{\beta|u|} < \infty.$$

iii) Si $(\overline{p}^*)' \leq m < \frac{N}{p}$ alors il existe une solution faible pour le probème (1.15) appartenant à $L^s(\Omega)$, tel que

$$s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p}+\overline{p}^*-m\overline{p}^*} = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N-m\overline{p}}.$$

Si $p_\infty = p_N > \overline{p}^*$, on a le théorème suivant.

Théorème 1.7. Soit $f \in M^m(\Omega)$. i) et ii) du théorème 1.6 restes toujours vraies de plus on a
iii) Si $\frac{N(p_N-\overline{p})}{\overline{p}(p_N-1)} \leq m < \frac{N}{p}$ alors il existe une solution faible pour le probème (1.15) appartenant à $M^s(\Omega)$, tel que

$$s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p}+\overline{p}^*-m\overline{p}^*} = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N-m\overline{p}}.$$

iv) Si $p'_N \leq m < \frac{N(p_N-\overline{p})}{\overline{p}(p_N-1)}$, alors il existe une solution faible pour le problème (1.15) appartenant à $M^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $\tilde{s} = m(p_N-1)$.

Les remarques 1.3,..., 1.7 restent toujours vérifiées dans ce cas.

Remarque 1.13. Si, dans les théorèmes précédents, $m \to \dfrac{N}{\overline{p}}$, on obtient $s \to +\infty$. De plus, les valeurs de s et $\tilde{s}$ obtenues dans les théorèmes 1.6 et 1.7 sont identiques aux théorèmes 1.2 et 1.3, comme prévu.

Remarque 1.14. Par (1.18), même si f appartient à $M^m(\Omega)$, avec $m > p'_\infty$, la solution faible de (1.15) est unique.
Pour le cas $1 < m \leq p'_\infty$ on a l'existence d'une solution pour le problème (1.15) au sens des distributions, comme dans (1.20).
Comme précédemment, on distingue entre $p_\infty = \overline{p}^*$ et $p_\infty = p_N$. Dans le premier cas, on a le résultat suivant.

Théorème 1.8. Si f appartient à $M^m(\Omega)$, avec $1 \leq m < (\overline{p}^*)'$ alors il existe une solution pour le probème (1.15)au sens des distributions appartenant à $M^s(\Omega)$, avec

$$s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p}+\overline{p}^*-m\overline{p}^*} = \frac{mN(\overline{p}-1)}{N-m\overline{p}}.$$

et $\partial_i u \in M^{s_i}(\Omega)$, avec

$$1 < s_i = p_i \frac{mN(\overline{p}-1)}{\overline{p}(N-m)} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., N.$$

Remarque 1.15. Si $s_i > 1$, pour tout $i = 1, ..., N$, sous condition d'avoir

$$\overline{p} > 1 + \frac{1}{m^*}.$$

Remarque 1.16. Notons que puisque $\overline{p}^* \geq p_N$,

$$\frac{N(p_N-\overline{p})}{\overline{p}(p_N-1)} < (\overline{p}^*)'$$

et

$$\frac{N(p_N-\overline{p})}{\overline{p}(p_N-1)} > 1 \Longleftrightarrow p_N > \frac{\overline{p}(N-1)}{N-\overline{p}}.$$

On peut donc améliorer le théorème précédent si $\frac{\overline{p}(N-1)}{N-\overline{p}} < p_N \leq \overline{p}^*$ et $1 < m < \frac{N(p_N-\overline{p})}{\overline{p}(p_N-1)}$, de (1.19). En fait, on a une solution au sens des distributions pour (1.15) appartenant à $M^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $\tilde{s} = m(p_N-1)$. De plus $\partial_i u \in M^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $1 < \tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p'_N}$ pour tout $i = 1, ..., N$, puisqu'il est aussi valable (1.21). Notons que, pour avoir $\tilde{s}_i > 1$, nous supposons

$$\overline{p} > \frac{p'_N}{m}.$$

Dans le second cas, $p_\infty = p_N$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.9. Si f appartient à $M^{m}(\Omega)$, avec $1 < m \leq p'_N$, alors il existe une solution au sens des distributions u pour le problème (1.15), appartenant à $M^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $\tilde{s} = m(p_N - 1)$ et $\partial_i u \in M^{\tilde{s}}(\Omega)$, avec $\tilde{s}_i = p_i \frac{m}{p'_N}$ pour tout $i = 1, ..., N$. On suppose aussi que

$$\overline{p} > \frac{p'_N}{m}.$$

Remarque 1.17. Sous l'hypothèse $p_N > \overline{p}^*$, on a

$$\frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)} > (\overline{p}^*)' > p'_N$$

et si

$$m < \frac{N(p_N - \overline{p})}{\overline{p}(p_N - 1)},$$

alors (1.19) et (1.21) restes toujours vérifiées

Remarque 1.18. Rappelons, comme déjà mentionné précédemment, que si nous choisissons $p_i = 2$, pour tout $i = 1, ..., N$, (ou de manière équivalente $p_i = p$, pour tout $i = 1, ..., N$), on obtient les résultats classiques de régularité.

1.7 Résultats d'existence pour un problème semi-linéaire

Dans cette section, nous parlons principalement de certains résultats contenus dans [35]. Nous étudions les questions d'existence, de non-existence et de multiplicité de solutions positives pour la classe suivante de problèmes elliptiques semi-linéaires anisotropes

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right] &= \lambda |u|^{q-2} u \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

où

$$p_1 < q < p_N. \tag{1.23}$$

Pour une plus de généralité nous traitons aussi les cas

$$1 < q < p_1 \qquad \text{et} \quad p_N < q < \overline{p}^*, \qquad \text{avec} \quad \overline{p}^* = \frac{\overline{p}N}{N - \overline{p}}.$$

Les cas précédents ont été étudiés dans plusieurs articles, citons par exemple [5], [38], [39], [42]], [63], [64], [66] et [65].

Nous donnons d'abord la définition d'une solution faible de (1.22), qui est une fonction appartenant à $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, telle que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i\phi dx=\lambda\int_{\Omega}|u|^{q-2}u\phi dx \qquad \forall\phi\in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{1.24}$$

Remarque 1.19. Notez que toute solution faible u de (1.22) est en fait une solution forte au sens de [42], principalement u appartient à $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$. Il découle du théorème 2 dans [42] et de l'hypothèse (1.23).

Tous les résultats, dans ce qui suit, sont dus à la structure variationnelle du problème. En effet, si on définit la fonctionnelle

$$J_\lambda(v)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}\int_{\Omega}|\partial_i v|^{p_i}dx-\frac{\lambda}{q}\int_{\Omega}\left|v^+\right|^q dx, \tag{1.25}$$

où $v^+=\max\{v,0\}$, alors tout point critique de J_λ est une solution faible non négative de (1.22).

Dans ce qui suit, nous rappelons les résultats connus concernant notre problème. Nous rapportons quelques résultats présentés dans [42], si $q>p_N$. Les auteurs de cet article obtiennent plusieurs résultats d'existence, de non-existence et de régularité. Pour être complet, nous donnons aussi ces résultats.

Théorème 1.10. Soit $q<p_\infty$, définie dans (1.16). alors pour tout $\gamma>0$ il existe $\lambda_\gamma>0$ et $u_\gamma\in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ tel que $\|u_\gamma\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}=\gamma$ et u_γ est une solution faible bornée du problème (1.22) quand $\lambda=\lambda_\gamma$.

Remarque 1.20. Nous soulignons, comme déjà dit dans [42], que ce théorème ne peut pas être utilisé pour avoir une solution au problème (1.22) pour un λ donné. Ce fait est dû au manque d'homogénéité de l'opérateur différentiel.

Le théorème 1.10 donne l'existence de paires $(\lambda_\gamma,u_\gamma)\in(0,\infty)\times W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ qui résolvent (1.22), considéré comme un problème de valeur propre. De plus, il est difficile de savoir quel exposant q produit une situation de résonance, c'est-à-dire un problème de valeur propre.

Dans le Problème (2) proposé dans [42], les auteurs font une conjecture. Ils pensent que la situation de résonance se produit dès que $q \leq p_N$ (voir aussi la section 8.1 [42]), mais peut être existe-t-il des «lacunes spectrales», à savoir des $q \in (p_1, p_N)$ tels que (1.22) admet une solution faible pour tout $\lambda > 0$. Cette conjecture est confirmée par les résultats (voir la proposition 3.7, le théorème 3.9 et le théorème 3.13 dans [33]). Évidemment, si $p_i = p$ pour tout $i = 1, ..., N$, le problème de résonance correspond à $q = p$, voir par exemple [10].

Dans [42], un résultat d'existence pour $\lambda > 0$ fixé a été prouvé dans le théorème 1.11 ci-dessous, ainsi qu'un résultat de non-existence a également été présenté, l'outil permettant de prouver ce résultat est l'identité de Pohözaev. Mais aussi la formulation la plus faible nécessite des solutions de classe $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ pour avoir des conditions aux limites bien définis, il semble difficile d'obtenir cette régularité pour une solution faible de (1.22), voir par exemple [47]. Pour gérer cette difficulté, ils construisent une suite de problèmes "doublement approximant" , puis prouvent un résultat de forte régularité pour la solution des problèmes approchés (théorème 5 de [42]). À la fin, ils présentent leur principal résultat de non-existence (théorème 6 dans [42]). Il indique que, dans au moins un cas critique (1.22), n'admet pas de solutions faibles, appartenant à $W_0^{1,(p_i)} \cap L^{(q-1)p_1'}(\Omega)$, autre que $u \equiv 0$. Ce résultat nécessite deux hypothèses différentes. Premièrement, le domaine Ω doit avoir une caractéristique géométrique particulière, qui modifie la notion classique d'un domaine étoilé, en fonction de l'anisotropie de l'opérateur. Deuxièmement, les exposants p_i doivent être suffisamment concentrés, c'est-à-dire

$$p_i \geq 2 \qquad \forall i = 1, ..., N \qquad \text{et} \qquad p_N < \frac{N+2}{N} p_1. \tag{1.26}$$

Si (1.26) est vrai, nous avons nécessairement $N \geq 3$ et $\overline{p}^* > p_N$, donc $p_\infty = \overline{p}^*$. Dans [42], on suppose aussi $q \geq \overline{p}^*$ et cette hypothèse est conforme au résultats (voir Théorèmes 3.9 et 3.13 dans [33]). Pour le cas $p_N < q < \overline{p}^*$, nous suivons [42], (voir aussi [63]et [64]pour le cas plus général $p_i = p_i(x)$, pour tout $i = 1, ..., N$). Nous avons le théorème ci-dessous.

Théorème 1.11. Soit q tel que

$$p_N < q < \overline{p}^* \tag{1.27}$$

alors, pour tout $\lambda > 0$, le problème (1.22) possède une solution faible positive non triviale.

Démonstration. Considérons la fonction (1.25). Dans ce cas, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Weierstrass, que nous utiliserons dans le prochain théorème, car la fonction n'est pas coercitive, mais il est possible d'appliquer un théorème du col afin d'obtenir un niveau critique pour $J_\lambda(u)$ et ainsi une solution faible du problème (1.22). Tout d'abord, nous prouvons dire que la fonctionnelle d'énergie (1.25) satisfait aux hypothèses géométriques requises par le théorème du col ("Mountain-Pass").

Conditions géométriques

i) évidemment $J_\lambda(0) = 0$.

ii) Il existe $\rho \in (0,1)$ et $\alpha > 0$ tels que $J_\lambda(u) \geq \alpha > 0$, pour tout $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, avec $\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho$.

On applique l'inégalité de Hölder, avec les exposants $\overline{p}^*/q$ et $(\overline{p}^*/q)'$ (nous rappelons que $q < \overline{p}^*$), au deuxième terme de notre fonction, on obtient

$$J_\lambda(v) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} - \frac{\lambda C_0}{q} \left(\int_\Omega |v|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{q}{\overline{p}^*}} dx.$$

Maintenant, nous appliquons l'inégalité anisotrope de Sobolev

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \qquad \forall \in [1, \overline{p}^*].$$

au dernier terme de l'expression ci-dessus, nous obtenons

$$J_\lambda(v) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} - \frac{\lambda C_1}{q} \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^{q}.$$

Nous rappelons le résultat suivant, il existe $C > 0$, cela ne dépend pas de ρ, tel que

$$\sigma_i > 0 \qquad \forall i, \qquad \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \rho \in (0,1) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^{p_i}}{p_i} \geq C\rho^{p_N}.$$

On prend $\sigma_i = \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}$, on a

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho \in (0,1)$$

et donc

$$J_\lambda(v) \geq C_2 \|\partial_i v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^{p_N} - \frac{\lambda C_1}{q} \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^{q} = \rho^{p_N} \left(C_2 - \frac{\lambda C_1}{q} \rho^{q-p_N} \right).$$

Puisque $p_N < q$, on peut trouver $\alpha, \rho > 0$ tel que

$$J_\lambda(v) \geq \alpha \qquad \forall \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho < \left(\frac{C_2 q}{\lambda C_1}\right)^{\frac{1}{q-p_N}}.$$

Condition de compacité

iii) Il existe $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ et $\beta \geq \rho > 0$ avec $\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} > \beta$ tel que $J_\lambda(v) < 0$. On considère $v = tz$ pour $z \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $t > 1$, on obtient

$$J_\lambda(tz) = \sum_{i=1}^{N} \frac{t^{p_1}}{p_i} \int_\Omega |\partial_i z|^{p_i} - \frac{\lambda t^q}{q} \int_\Omega |z|^q \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{t^{p_N}}{p_i} \int_\Omega |\partial_i z|^{p_i} - \frac{\lambda t^q}{q} \int_\Omega |vz|^q.$$

Il est clair, en (1.27), que

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} J_\lambda(tz) = -\infty.$$

Alors pour $t > 1$ assez grand on peut prendre $v = tz$ tel que $\|tz\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} > \beta$ et $J_\lambda(tz) < 0$.

Maintenant, on prouve l'hypothèse de compacité du théorème du col.
Soit $\{v_n\}$ une suite de Palais-Smale, telle que

1) $J_\lambda(v_n) \longrightarrow c$,

2) $J'_\lambda(v_n) \longrightarrow 0$,

où $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} J_\lambda(\gamma(t))$,
avec $\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1]\,; W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\right) : \gamma(0) = 0 \text{ et } \gamma(1) = tz\right\}$, où tz choisis dans iii).
de plus J'_λ est la dérivée au sens de Fréchet de J_λ,

$$\langle J'_\lambda(v), \phi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i - 2} \partial v \partial_i \phi - \lambda \int_\Omega |v|^{q-2} v\phi.$$

Ces deux conditions sont équivalentes aux suivantes :

1') Il existe une suite $\{a_n\}$ qui converge vers zéro, telle que $J_\lambda(v_n(t)) = a_n + c$, i.e.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v_n|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |v_n|^q = a_n + c.$$

2') Il existe $\{y_n\} \subset \left[W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\right]^*$: $y_n \to 0$ dans $\left[W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\right]^*$, telle que

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i v_n|^{p_i-2} \partial v_n \partial_i \phi = \lambda \int_{\Omega} |v_n|^{q-2} v_n \phi - \langle y_n, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega).$$

Maintenant on choisit $\phi = v_n$ dans 2')

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i v_n|^{p_i} = \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |v_n|^q - \frac{1}{q} \langle y_n, v_n \rangle .$$

Alors si on soustrait cette expression de 1'), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{\Omega} |\partial_i v_n|^{p_i} - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |v_n|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |v_n|^q = a_n + c - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega} |v_n|^q + \frac{1}{q} \langle y_n, v_n \rangle$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q} \right) \int_{\Omega} |\partial_i v_n|^{p_i} = a_n + c + \frac{1}{q} \langle y_n, v_n \rangle .$$

Si on utilise les hypothèses sur y_n, a_n et q, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ indépendant de n tel que

$$\|v_n\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \leq M.$$

Par conséquent, nous avons, une sous-suite,que nous notons encore v_n,

$$v_n \to v \qquad \text{faiblement dans } W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$$

par l'inégalité anisotrope de Sobolev on a

$$v_n \to v \qquad \text{fortement dans } L^r(\Omega) \qquad \forall r < \overline{p}^*.$$

Maintenant prenons $\phi = v_n - v$ dans 2') on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i v_n|^{p_i-2} \partial v_n \partial_i (v_n - v) = \lambda \int_{\Omega} |v_n|^{q-2} v_n (v_n - v) - \langle y_n, v_n - v \rangle, \qquad \forall \phi \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega).$$

On soustrait des termes de l'expression ci-dessus

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i v|^{p_i-2} \partial v \partial_i (v_n - v),$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\left|\partial_i v_n\right|^{p_i-2}\partial v_n-\left|\partial_i v\right|^{p_i-2}\partial v\right)\partial_i\left(v_n-v\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\partial_i v\right|^{p_i-2}\partial v\partial_i\left(v_n-v\right)+\lambda\int_{\Omega}\left|v_n\right|^{q-2}v_n\left(v_n-v\right)-\left\langle y_n,v_n-v\right\rangle,$$

du fait que

$$\int_{\Omega}\left(\left|\partial_i v_n\right|^{p_i-2}\partial v_n-\left|\partial_i v\right|^{p_i-2}\partial v\right)\partial_i\left(v_n-v\right)\geq C_3\int_{\Omega}\left|\partial_i\left(v_n-v\right)\right|^{p_i}\qquad\forall i=1,...,N,$$

et $p_i\geq 2$ pour tout i, on obtient

$$C_3\int_{\Omega}\left|\partial_i\left(v_n-v\right)\right|^{p_i}\leq-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\partial_i v\right|^{p_i-2}\partial v\partial_i\left(v_n-v\right)+\lambda\int_{\Omega}\left|v_n\right|^{q-2}v_n\left(v_n-v\right)-\left\langle y_n,v_n-v\right\rangle,$$

Le même résultat est également valable si $1<p_i<2$ par une légère modification.

$$\left\langle y_n,v_n-v\right\rangle\to 0,$$

par la convergence forte de y_n dans l'espace dual de $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ et la convergence faible de v_n vers v dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. de plus

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|\partial_i v\right|^{p_i-2}\partial v\partial_i\left(v_n-v\right)\to 0,$$

Puisque $v_n\to v$ faiblement dans $W_0^{1,p_i}\left(\Omega\right)$. pour le terme

$$\int_{\Omega}\left|v_n\right|^{q-2}v_n\left(v_n-v\right),$$

par l'inégalité de Höder avec les exposants $\dfrac{\overline{p}^*}{q-1}$ et $\left(\dfrac{\overline{p}^*}{q-1}\right)'$, on obtient

$$\int_{\Omega}\left|v_n\right|^{q-2}v_n\left(v_n-v\right)\leq\left(\int_{\Omega}\left|v_n\right|^{\overline{p}^*}\right)^{\frac{q-1}{\overline{p}^*}}\left(\int_{\Omega}v_n\left(v_n-v\right)\right)^{1-\frac{q-1}{\overline{p}^*}}.$$

On note que

$$\left(\frac{\overline{p}^*}{q-1}\right)'=\frac{\overline{p}^*}{\overline{p}^*-q+1}<\overline{p}^*,$$

puisque $q < \overline{p}^*$, et que $\|v_n\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq M$, on a alors

$$\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n (v_n - v) \to 0.$$

alors

$$\|v_n - v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \to 0.$$

□

La condition de "Palais-Smale" est également vraie. Par conséquent, comme conséquence du théorème du col, on déduit que J_λ admet un point critique non trivial et nous obtenons donc une solution du problème non triviale faible (1.22).

Maintenant on traite le cas :

$$1 < q < p_1 \tag{1.28}$$

Ce cas a déjà été étudié dans [63]et [64] (voir aussi les références qui y figurent). Les auteurs étudient le cas plus général $p_i = p_i(x)$, pour tout $i = 1, ..., N$. Pour prouver les résultats suivants, nous suivons ces deux articles.

Théorème 1.12. Soit $q : 1 < q < p_1$, alors il existe $\lambda^{**} > 0$ et $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda^{**}$ et $\lambda \in (0, \lambda^*)$, le problème (1.22) possède une solution faible positive non-triviale.

Démonstration. Nous prouvons que la fonction d'énergie (1.25) est coercitif et faiblement semi-continu. Nous utilisons l'inégalité de Hölder avec les exposants $\overline{p}^*/q$ et $(\overline{p}^*/q)'$, et c'est possible parce que (1.28) est vrai.

On a

$$J_\lambda \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} - \frac{\lambda C_0}{q} \int_\Omega \|v\|^q_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}.$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité de Sobolev, avec $r = \overline{p}^*$, nous obtenons

$$J_\lambda \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} \|\partial_i v\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)} - \frac{\lambda C_1}{q} \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} \right)^q.$$

Pour une inégalité numérique, i. e.

$$\left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} \right)^q \leq C_2 \sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|^q_{L^{p_i}(\Omega)},$$

on obtient

$$J_\lambda \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} - \frac{\lambda C_3}{q} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{q}.$$

Puisque $p_N \geq p_i$, pour tout $i = 1, ..., N$, on a

$$J_\lambda \geq \frac{1}{p_N} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} - \frac{\lambda C_3}{q} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{q}.$$

Maintenant, nous notons que $q < p_i$ pour tout i, parce que pour l'hypothèse $q < p_1$, et

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \to +\infty \Longrightarrow \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} \to +\infty \qquad \text{pour certains } i.$$

On obtient donc la coercivité de J_λ, c'est-à-dire

$$J_\lambda(v) \to +\infty \quad \text{quand } \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \to +\infty.$$

Pour la semi-continuité faiblement inférieure, considérons une suite $\{v_n\} \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ telle que

$$v_n \to v \quad \text{faiblement dans } W_0^{1,(p_i)}(\Omega).$$

Comme l'injection $W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ pour $r \in [1, \overline{p}^*]$ est compacte pour tout $r \in 1, \overline{p}^*)$, nous avons aussi

$$v_n \to v \ \text{ dans } L^r(\Omega) \qquad \forall r < \overline{p}^*,$$

ce qui implique

$$\int_\Omega |v_n|^q \to \int_\Omega |v|^q,$$

puisque $q < p_i < \overline{p}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} J_\lambda(v_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v_n|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |v_n|^q \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\partial_i v_n|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |v|^q \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |v|^q = J_\lambda(v),
\end{aligned}$$

par la semi-continuité faible de la norme, on a

$$\liminf_{n\to\infty} \| \partial_i v_n \|_{L^{p_i}(\Omega)} \geq \| \partial_i v \|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Maintenant, on peut utiliser le théorème de Weierstrass (voir par exemple [80]) pour trouver un minimum global de J_λ, u_λ, qui est une solution faible de (1.22). Maintenant on montre que u_λ est non trivial pour λ assez grand. Soit $t > 1$, un réel fixé et $\Omega_1 \subset \Omega$ un ouvert avec $meas(\Omega_1) > 0$, nous prenons une fonction $v_0 \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ tel que $v_0 = t_0$ dans Ω et $0 \leq v_0 \leq t_0$ dans $\Omega \setminus \Omega_1$. Nous avons

$$J_\lambda(v_0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i v_0|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |v_0|^q.$$

Puisque $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, nous avons

$$\| v_0 \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} \leq C_4,$$

alors par définition de v_0 nous obtenons,

$$J_\lambda(v_0) \leq \frac{C_5}{p_1} - \frac{\lambda}{q} \int_{\Omega_1} |v_0|^q \leq \frac{C_5}{p_1} - \frac{\lambda}{q} t_0^q meas(\Omega_1).$$

Donc on peut choisir

$$\lambda \geq \frac{C_7 q}{p_1 t_0^q meas(\Omega_1)} = \lambda^{**},$$

tel que $J_\lambda(v_0) < 0$ pour tout $\lambda \geq \lambda^{**}$. Puisque u_λ est un minimum global, il s'ensuit que $J_\lambda(u_\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \geq \lambda^{**}$ et que u_λ est une solution faible non triviale du problème (1.22).

Par conséquent, on conclut la première partie de la preuve du théorème 1.12. Pour la seconde partie de la démonstration, nous raisonnons comme dans [63]. Au début, nous montrons qu'ils existent $\rho \in (0, 1)$ et $\alpha \geq 0$ tel que $J_\lambda(v) \geq \alpha > 0$ pour tout $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ avec $\| v \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho$. Puisque $q < p_1$, l'injection

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \qquad \forall r \in [1, \overline{p}^*]$$

ait lieu. Nous avons, de

$$L^r(\Omega) \leq C \sum_{i=1}^{N} \| \partial_i v \|_{L^{p_i}(\Omega)} \qquad \forall r \in [1, \overline{p}^*]$$

avec $r = q$,

$$\| v \|_{L^q(\Omega)} \leq C_7 \| v \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}, \quad \forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega).$$

Donc

$$J_\lambda(v) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega \| \partial_i v \|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} - \frac{\lambda C_7}{q} \| v \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^q$$

Puisque $\| v \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho$, nous obtenons

$$\| \partial_i v \|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq \| v \|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho, \quad \forall i = 1, ..., N$$

et puisque $\rho \in (0,1)$ et $p_N \geq p_i$ pour tout $i = 1, ..., N$, il en découle

$$\|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_N} \leq \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i}, \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Donc

$$J_\lambda(v) \geq C_s \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^{p_N} - \frac{\lambda C_\gamma}{q} \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}^q = \rho^q \left(C_s \rho^{p_N - q} - \frac{\lambda C_\gamma}{q} \right)$$

Alors pour tout

$$0 < \lambda < \lambda^* < \frac{q C_s \rho^{p_N - q}}{C_\gamma}$$

et $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ avec $\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \rho$, nous obtenons la résultat. Maintenant nous prouvons qu'il existe $z \geq 0$, $z \neq 0$ et $J_\lambda(tz) < 0$ pour $t > 0$ assez petit.Soit $z \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que supp$(z) \supset \bar{\Omega}_2$, $z \equiv 1$ dans $\bar{\Omega}_2$ et $0 \leq z \leq 1$ dans Ω. Alors pour tout $0 < t < 1$ on a

$$\begin{aligned} J_\lambda(tz) &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{t^{p_i}}{p_i} |\partial_i z|^{p_i} - \frac{\lambda t^q}{q} \int_\Omega |z|^q \leq \\ &\leq \frac{t^{p_1}}{p_1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i z|^{p_i} - \frac{\lambda t^q}{q} \int_\Omega |z|^q = \\ &= t^q \left(\frac{t^{p_1 - q}}{p_1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i z|^{p_i} - \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |z|^q \right). \end{aligned}$$

□

Donc, puisque $q < p_1,\ J_\lambda(tz) < 0$ si

$$t < \min\left\{1, \left(\frac{\lambda p_1 \int_\Omega |z|^q}{q\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i z|^{p_i}}\right)^{\frac{1}{p_1-q}}\right\}.$$

Soit $\lambda^* > 0$, comme dans (1.19),et $\lambda \in (0, \lambda^*)$. D'après les considérations précédentes, il existe une boule centrée à l'origine et de rayon ρ $B_\rho(0)$ dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, telle que

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

De plus, il existe $z \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ tel que $J_\lambda(tz) < 0$ pour tout t assez petit et pour tout $v \in B_\rho(0)$,

$$J_\lambda(v) \geq \frac{1}{p_N}\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i} - \frac{\lambda C_9}{q}\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^q .$$

il résulte que

$$-\infty < \underline{c} = \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Soit $0 < \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda$. En appliquant le principe variationnel d'Ekeland (voir [37]et aussi [31]) à la fonction $J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \to \mathbb{R}$. Nous trouvons $v_\varepsilon \in \overline{B_\rho(0)}$ tel que :

$$\begin{aligned} J_\lambda(v_\varepsilon) &< \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \varepsilon, \\ &\quad \text{et} \\ J_\lambda(v_\varepsilon) &< J_\lambda(v) + \varepsilon\|v - v_\varepsilon\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}, \qquad v \neq v_\varepsilon. \end{aligned}$$

puisque

$$J_\lambda(v_\varepsilon) < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda + \varepsilon < \inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda,$$

$v_\varepsilon \in B_\rho(0)$. Maintenant on définit

$$I_\lambda(v) = J_\lambda(v) + \varepsilon\|v - v_\varepsilon\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} .$$

Il est clair que v_ε est le minimum de I_λ et donc

$$\frac{I_\lambda\left(v_\varepsilon+tz\right)-I_\lambda\left(v_\varepsilon\right)}{t}\geq 0,$$

pour $t>0$ assez petit et $z\in B_1\left(0\right)$. on obtient pour J_λ

$$\frac{I_\lambda\left(v_\varepsilon+tz\right)-I_\lambda\left(v_\varepsilon\right)}{t}+\varepsilon\left\|z\right\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}\geq 0.$$

quand $t\to 0$ il en résulte

$$\left\langle J'_\lambda\left(v_\varepsilon\right),z\right\rangle-\varepsilon\left\|z\right\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)}>0$$

ce qui implique que

$$\left\|J'_\lambda\left(v_\varepsilon\right)\right\|\leq\varepsilon.$$

On conclut qu'il existe $\{w_n\}\subset B_\rho\left(0\right)$ tel que

$$J_\lambda\left(w_n\right)\to\underline{c}\qquad\text{et}\qquad J'_\lambda\left(w_n\right)\to 0. \tag{1.29}$$

De toute évidence, $\{w_n\}$ est placée $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. Si nous procédons comme dans le théorème 3.5, nous obtenons la forte convergence de $\{w_n\}$ vers w dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. Donc pour (1.29) nous avons $J_\lambda\left(w_n\right)=\overline{c}<0$ et $J'_\lambda\left(w\right)=0$, c'est-à-dire que w est une solution faible positive non triviale pour le problème (1.22) ; ce qui complète la preuve du théorème 1.12.

Chapitre 2

Problème Anisotrope avec non-linéarité singulière

Sommaire

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un problème elliptique faisant intervenir l'opérateur

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \, \partial_i u \right].$$

Ce genre de problèmes est largement étudié dans la littérature, nous citons par exemple, [32], [33], [34], et les références inclus. Il existe également une littérature abondante sur les problèmes elliptiques avec des non-linéarités singulières, voir par exemple [14], [46], lorsque l'opérateur différentiel considéré est l'opérateur Laplacien, nous référons le lecteur à [29].

Dans les travaux [1], [34] et [70],...,etc, les auteurs ont étudiés des problèmes linéaires (avec Laplacien) et non-linéaires (avec p-Laplacien et opérateur anisotrope) avec la présence d'un terme gradient en plus, des résultats d'existence, non existence, de multiplicité et de régularité des solutions ont été obtenus.

Nous mentionnons également l'ouvrage phare [42], dans lequel l'opérateur anisotrope est associé à une non-linéarité et permet d'obtenir des résultats d'existence et de non-existence.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -Lu &= \dfrac{f}{u^\gamma} \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \quad u &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\gamma > 0$,

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right],$$

et Ω est un domaine régulier borné dans $\mathbb{R}^N$. Nous supposerons sans perte de généralité que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue approprié $L^m(\Omega)$.

Le cadre fonctionnelle naturel associé au problème (2.1) est l'espace anisotrope de Sobolev introduit dans le chapitre préliminaire (Définition 1.5).

En l'absence d'un principe du Maximum fort, nous allons souvent supposer que les $p_i \geq 2$.

Définition 2.1. On dit que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution d'énergie de (2.1) si et si seulement si

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\gamma} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

et on dit que u est une solution faible de (2.1) si $\partial_i u^{p_i - 1} \in L^1(\Omega)$, on a $\dfrac{f}{u^{\gamma}} \in L^1_{loc}(\Omega)$, on obtient donc l'identité suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Nous devons également rappeler les fonctions de troncature suivantes

$$T_n(s) = \begin{cases} n\frac{s}{|s|} & si \quad |s| > n \\ s & si \quad |s| \leq n \end{cases}$$

et

$$G_n(s) = s - T_n(s).$$

Parfois, et pour des fins purement techniques nous allons utiliser l'espace de Marcinkiewicz $M^m(\Omega)$ (voir la définition 1.1) au lieu de $L^m(\Omega)$.

Parmi une vaste littérature existante traitant des problèmes anisotropes et problèmes elliptiques à terme singulier, on citera par exemple [16], [24], [27], [36], [23], [45], [68], [69] et [75].

2.2 Problèmes d'approximation

Considérons d'abord le problème d'approximation suivant

$$\begin{cases} -Lu_n &= \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} & \text{dans } \Omega, \\ u_n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_n &\geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f_n = T_n(f)$. Dans tout le chapitre C dénotera une constante pouvant varier d'une ligne à l'autre.

Lemme 2.1. Le problème (2.2) admet une solution $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous suivrons le même raisonnement que dans ([14])

Fixons $n \in \mathbb{N}$, et soit $v \in L_{\overline{p}^*}(\Omega)$. Considérons l'équation

$$-Lw = \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}}, \tag{2.3}$$

il est clair que le problème précédent a une solution unique chaque fois que le côté droit appartient à $L^s(\Omega)$ avec $s \geq p'_\infty$ voir par exemple ([32]) et ([33]). On Dénote $w = S(v)$,

en utilisant w comme fonction test dans (3.3), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i w|^{p_i} = \int_{\Omega} \frac{w f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} \leq n^{\gamma+1} \int_{\Omega} |w|$$

par l'inégalité de Sobolev (1.1),

$$\|w\|^{p_N}_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i w|^{p_i},$$

par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} |w| \leq \left(\int_{\Omega} |w|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^*}}.$$

alors

$$\|w\|^{p_N}_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C n^{\gamma+1} \|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)},$$

et donc

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C' \left(n^{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{p_N - 1}} = R_N.$$

Ce qui signifie que la boule de rayon R_N dans $L^{\overline{p}^*}(\Omega)$ est invariant par S, et donc par l'injection de Sobolev et d'après le théorème du point fixe de Schauder nous concluons que l'approximation du problème (2.2) admet une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, pour chaque n fixé.

$\square$

Remarque 2.1. On peut aussi utiliser des méthodes variationnelles pour prouver l'existence de solution, en minimisant la fonctionnelle d'énergie.

$$J_\lambda(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_{\Omega} F(u)$$

où

$$F(s) = \int_0^s \frac{f_n}{\left(t + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} dt$$

L'existence de la solution dans l'espace de Sobolev est assurée par les Résultats suivants :

Définition 2.2. Soient X un espace de Banach et ω une partie de X. Une fonction $J : \omega \to \mathbb{R}$ est dite **faiblement séquentiellement s.c.i.** si pour toute suite $(x_n)_n$ de ω convergeant faiblement vers $x \in \omega$ on a

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

On peut montrer que, dans les espaces de Banach réflexifs, les fonctions faiblement séquentiellement s.c.i. atteignent leur minimum, pourvu qu'elles tendent vers $+\infty$ à l'infini.

Proposition 2.1 ([51])**.** Soient X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \to R$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non borné, on suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que

$$\|x_n\| \to \infty \text{ on a } J(x_n) \to +\infty.$$

Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e.

$$\exists u \in K, \qquad J(u) = \inf_{v\in K} J(v) = \min_{v\in K} J(v).$$

Démonstration. En effet si $\alpha := \inf_{v\in K} J(v)$ et $(u_n)_n$ est une suite minimisante, du fait que J tend vers l'infini à l'infini, $(u_n)_n$ est bornée. Comme X est réflexif, il existe une sous-suite $(u_{n_i})_i$ et $u \in X$ tels que $u_{n_i} \to u$ dans $X-$faible ; K étant un convexe fermé, il est faiblement fermé et $u \in K$. Finalement :

$$\alpha \leq J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_{n_i}) = \alpha$$

car J est faiblement séquentiellement s.c.i. Ainsi $\alpha = J(u) \in \mathbb{R}$ et J atteint son minimum en $u \in K$. $\square$

Lemme 2.2. La suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n.

Démonstration. Rappelons que $f_n = T_n(f)$ et donc $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$

$$-Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}$$

puisque

$$-Lu_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}$$

et ainsi on a

$$\begin{aligned} -Lu_n + Lu_{n+1} &\leq f_{n+1}\left[\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}\right] \\ &\leq f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}\right] \end{aligned}$$

en utilisant $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test dans la dernière inégalité, le second membre donne

$$f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}\right](u_n - u_{n+1})^+ \leq 0.$$

Maintenant, en tenant compte du problème de u_n et de u_{n+1}, il s'ensuit que

$$\int_\Omega (-Lu_n + Lu_{n+1})(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n - |\partial_i u_{n+1}|^{p_i-2}\partial_i u_{n+1}\right)\partial_i (u_n - u_{n+1})^+ \leq 0.$$

En intégrant sur le sous-ensemble de Ω où $u_n \geq u_{n+1}$ et en utilisant l'inégalité suivante pour $p_i \geq 2$

$$C_0 |\partial_i (u_n - u_{n+1})|^{p_i} \leq \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n - |\partial_i u_{n+1}|^{p_i-2}\partial_i u_{n+1}\right)\partial_i (u_n - u_{n+1})$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\partial_i (u_n - u_{n+1})^+\right|^{p_i} \leq 0.$$

Par conséquent

$$u_n \leq u_{n+1},$$

ce qui nous permet de conclure que $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n. □

Remarque 2.2. L'unicité de la solution u_n du problème (2.2) est une conséquence directe de la comparaison introduite au début de la preuve.

Remarque 2.3. On peut facilement prouver le lemme précédent pour le cas $p_i \leq 2$, mais on se limite au cas $p_i \geq 2$ car (à notre connaissance), l'opérateur L vérifie le principe du Maximum fort uniquement dans le cas où $p_i \geq 2$ voir par exemple ([32]), le principe du Maximum qui sera nécessaire par la suite.

Lemme 2.3. Pour tout $n \in I\!N$, u_n est la solution du problème d'approximation (2.2), est telle que $u_n \in L^\infty(\Omega)$ et pour tout $K \subset\subset \Omega$, $u_n \geq C_K > 0$.

Démonstration. Par quelques modifications dans la théorie des opérateurs de Leray-Lions, on peut montrer l'existence d'une solution au problème.

$$-Lu_1 = \frac{f_1}{(u_1+1)^\gamma}$$

et donc

$$-Lu_1 = \frac{f_1}{(\|u_1\|_\infty + 1)^\gamma} \geq 0$$

Le principe du Maximum Fort, et la monotonie de $\{u_n\}_n$ nous permet de dire que $u_n \geq C_K > 0$. L'estimation $L^\infty(\Omega)$ de $\{u_n\}_n$, est une conséquence directe du résultat de Stampachia [79], comme montré dans [14]. □

2.3 Passage à la limite en n

2.3.1 Cas $\gamma = 1$

Théorème 2.1. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors le problème (2.1) admet une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, obtenue comme limite de $\{u_n\}_n$.

Démonstration. En utilisant u_n comme fonction test dans le problème

$$-Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)}$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i}=\int_{\Omega}\frac{f_n u_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)}\leq\int_{\Omega}f_n\leq\int_{\Omega}f.$$

Puisque $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, alors elle converge faiblement vers u, ce qui nous ramène a écrire $-Lu_n$ comme suit :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i-2}\,\partial_i u_n\partial_i\varphi=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u\partial_i\varphi$$

pour toute fonction test $\varphi\in C_0^1(\Omega)$. D'autres part on a :

$$0\leq\left|\frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)}\right|\leq\frac{\|\varphi\|_\infty}{c_K}f$$

en utilisant le théorème de Lebesgue on conclus que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega}\frac{f_n\varphi}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)}=\int_{\Omega}\frac{f\varphi}{u}$$

ce qui achève la démonstration. □

Théorème 2.2. Soit $f\in M^m(\Omega)$, tel que $m>\frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (2.1) admet une solution $u\in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Considérons $G_k(u_n)$, $k>1$ comme une fonction test dans (2.2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i-2}\,\partial_i u_n\partial_i G_k(u_n)=\int_{\Omega}\frac{f_n G_k(u_n)}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)}$$

dans l'ensemble $\{u_n\geq k\}$ où $G_k(u_n)\neq 0$, sachant que $u_n+\frac{1}{n}\geq k>1$ et donc

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i G_k(u_n)|^{p_i}\leq\int_{\Omega}f_n G_k(u_n),$$

en particulier

$$\left(\int_{\Omega}|\partial_i G_k(u_n)|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i N}}\leq\left(\int_{\Omega}f_n G_k(u_n)\right)^{\frac{1}{p_i N}}.$$

Par l'inégalité de Sobolev (1.2), avec $r = \overline{p}^*$, on a

$$\|G_k(u_n)\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{p_i N}} = C \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{\overline{p}}}.$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$C \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{\overline{p}}} \leq C \left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^* \overline{p}}} \left(\int_\Omega |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^{*\prime} \overline{p}}},$$

Par conséquent

$$\left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^*} - \frac{1}{\overline{p}^* \overline{p}}} \leq C \left(\int_\Omega |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}} \right)^{\frac{1}{\overline{p}} - \frac{1}{\overline{p}^* \overline{p}}}.$$

Et puisque $p_i \geq 2 > 1$, ce qui implique que $\overline{p} > 1$; rappelons que

$$\overline{p} > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\overline{p}^*} - \frac{1}{\overline{p}^* \overline{p}} > 0,$$

puis en utilisant le fait que $f \in M^m(\Omega)$, $m > \overline{p}^{*\prime}$,

$$\int_{\{u_n > k\}} |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}} \leq C meas\,(A_k)^{1 - \frac{\overline{p}^{*\prime}}{m}} \qquad \text{where } A_k = \{u_n > k\}.$$

De nouveau par l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |G_k(u_n)| \leq C meas\,(A_k)^{\alpha},$$

avec

$$\alpha = \left(1 - \frac{\overline{p}^{*\prime}}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{\overline{p}^*}\right)\frac{1}{\overline{p} - 1} + 1 - \frac{1}{\overline{p}^*}.$$

En mettant

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(u_n)|,$$

du fait que

$$\text{meas}(A_k) = \int_\Omega 1_{\{u_n > k\}},$$

En utilisant la définition de G_k et en la différenciant par rapport à k, il est facile de voir que la dernière inégalité devient

$$(g(k))^{\frac{1}{\alpha}} \leq -Cg'(k).$$

Ainsi

$$1 \leq -Cg'(k)\,(g(k))^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{-C}{1-\frac{1}{\alpha}}\left(g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)'.$$

sachant que l'hypothèse $m > \frac{N}{\overline{p}}$ implique que $1 - \frac{1}{\alpha} > 0$, en intégrant la dernière inégalité obtenue

$$k \leq -C\left[g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - g(0)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right],$$

ce qui donne

$$Cg(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq -k + C\,\|u_n\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Comme $g(k)$ est non négatif et décroissant, la dernière inégalité assure l'existence de k_0 tel que $g(k_0) = 0$, et ainsi $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{k_0}$ et par la suite $u \in L^\infty(\Omega)$. □

Théorème 2.3. Soit $f \in L^m(\Omega)$, tel que $m > \frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (2.1) admet une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème précédent et du fait que $L^m(\Omega) \subset M^m(\Omega)$. □

Théorème 2.4. Soit $f \in L^m(\Omega)$, telle que, $\overline{p}^{*\prime} < m < \frac{N}{\overline{p}}$, alors le problème (2.1) admet une solution $u \in L^s(\Omega)$ avec $s = \dfrac{mN\overline{p}}{N - m\overline{p}}$.

Démonstration. L'existence de solution étant prouvée dans les théorèmes précédents, nous traitons maintenant de sa régularité. Soit $\psi = |T_k(u)|^{t_j p_j}\, T_k(u)$, pour $j = 1, 2, ...N$, comme fonction test dans (2.1) avec

$$t_j = \frac{m-1}{mp_j\gamma_j(N-1) - p_j m + 1}$$

et

$$\gamma_j = \frac{1}{N-1}\left(\frac{1}{m\overline{p}} - \frac{1}{N} + 1 - \frac{1}{mp_j}\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u\partial_i\left(|T_k(u)|^{t_jp_j}\,T_k(u)\right) &= \int_{\Omega}\frac{f}{u}\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\,T_k(u)\\ &\le \int_{\Omega} f\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\,.\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$C\int_{\Omega}|\partial_j T_k(u)|^{p_j}\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\le\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u\partial_i\left(|T_k(u)|^{t_jp_j}\,T_k(u)\right)\quad \forall j=1,2,...N.$$

Par l'inégalité de Hölder nous obtenons aussi

$$\int_{\Omega} f\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\le\left(\int_{\Omega}|f|^m\right)^{\frac{1}{m}}\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{t_jp_jm'}\right)^{\frac{1}{m'}}\qquad\forall j=1,2,...N.$$

Les dernières inégalités mises ensemble donnent

$$\int_{\Omega}|\partial_j T_k(u)|^{p_j}\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\le C\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{t_jp_jm'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Maintenant en prenant le produit sur j dans la dernière inégalité, nous obtenons

$$\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|\partial_j T_k(u)|^{p_j}\,|T_k(u)|^{t_jp_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}\le C\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{t_jp_jm'}\right)^{\frac{1}{p_jm'}},$$

et par (1.3) avec $r=s$ et $v=T_k(u)$ l'inégalité devient

$$\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{s}\right)^{\frac{N}{\overline{p}}-1}\le C\prod_{j=1}^{N}\left(\int_{\Omega}|T_k(u)|^{t_jp_jm'}\right)^{\frac{1}{p_jm'}}.$$

Notons que notre choix de t_j et γ_j vérifie

$$\begin{cases} s=\frac{1+t_j}{\gamma_j(N-1)-1+\frac{1}{p_j}}=t_jp_jm'=\frac{mN\overline{p}}{N-m\overline{p}}\\ \sum_{i=1}^{N}\gamma_i=1,\end{cases}$$

aussi en observant

$$\frac{N}{\overline{p}} - 1 > \frac{N}{m'\overline{p}} \text{ since } m < \frac{N}{\overline{p}},$$

et par l'hypothèse sur m nous avons aussi $m \geq (\overline{p}^*)'$, qui donne

$$\|T_k(u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C \quad \forall k \in N,$$

par passage à la limite $k \to +\infty$, et par le lemme de Fatou on conclut que

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C$$

qui est le résultat souhaité. □

2.3.2 Cas $\gamma < 1$

Théorème 2.5. Soit $f \in L^1(\Omega)$ alors il existe une solution u pour (2.1), appartenant à $W_0^{1,(s_i)}(\Omega)$, pour tout $s_i < p_i \dfrac{N(\overline{p} - (1-\gamma)N)}{\overline{p}\,(N - (1-\gamma))}$ et appartenant à l'espace de Lebesgue correspondant $L^{\overline{s}*}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $f_n = T_n(f)$, et soit $u_n \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution de (2.1). En utilisant u_n^γ comme fonction test dans (2.1) on a

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\, u_n^{\gamma-1} = \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{(1+u_n)^\gamma} \leq \int_\Omega f_n \leq \|f\|_{L^1},$$

qui peut être réécrite pour chaque $i = 1, 2, ..., N$ comme suit

$$\int_\Omega \frac{|\partial_i u_n|^{p_i}}{u_n^{1-\gamma}} \leq C,$$

et en particulier

$$\int_\Omega \frac{|\partial_i u_n|^{p_i}}{(1+u_n)^{1-\gamma}} \leq C.$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} = \int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i}\,(1+u_n)^{(\gamma-1)\frac{s_i}{p_i}}\,(1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i}}.$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} = \int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{p_i} (1+u_n)^{(\gamma-1)}\right)^{\frac{s_i}{p_i}} \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i-s_i}}\right)^{\frac{p_i-s_i}{p_i}},$$

ainsi

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i-s_i}}\right)^{\frac{p_i-s_i}{p_i}}.$$

Maintenant en choisissant dans la dernière inégalité $s_i = \theta p_i$, on a

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i}\right)^{\frac{1}{Ns_i}} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{\theta}{1-\theta}}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{Ns_i}}.$$

Par l'inégalité de Sobolev (1.2), on conclut que

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{\overline{s^*}}\right)^{\frac{1}{\overline{s^*}}} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{\theta}{1-\theta}}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{\overline{p}}}. \tag{2.4}$$

En utilisant l'hypothèse sur s_i, on obtient

$$(1-\gamma)\frac{\theta}{1-\theta} < \frac{\overline{s}N}{N-\overline{s}} = \overline{s^*},$$

ce qui nous permet d'utiliser l'inégalité de Hölder à droite de l'inégalité (2.4), pour obtenir

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{\overline{s^*}}\right)^{\frac{1}{\overline{s^*}}} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{\overline{s^*}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\overline{p}}\frac{1}{\overline{s^*}}}.$$

Nous devons maintenant passer à la limite en n. Comme il a été prouvé que

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \leq C,$$

par conséquent, à une sous suite nous avons

$$\partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \quad \text{faiblement in } L^{s_i}(\Omega),$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement in } L^{\overline{s^*}}(\Omega).$$

On suppose que

$$\partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \quad \text{fortement dans } L^{r_i}(\Omega) \text{ pour tout } r_i < s_i.$$

Ceci sera possible en utilisant les mêmes arguments que dans la page 18 de [32] ; nous rappelons les détails pour la commodité du lecteur. Pour chaque $\eta > 0$, on définit l'ensemble $A_\eta = \{|u_n - u_m| \leq \eta\}$ alors on a

$$\int_{A_\eta} \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u_m|^{p_i-2} \partial_i u_m\right) \partial_i (u_n - u_m) \leq 2\eta \|f\| .$$

Par l'inégalité algébrique (3.2), utilisée précédemment, nous obtenons

$$\int_{A_\eta} |\partial_i (u_n - u_m)|^{p_i} \leq C\eta.$$

Maintenant, par inégalité de Hölder, il en résulte que

$$\int_\Omega |\partial_i (u_n - u_m)|^{r_i} \leq C_1 \eta^{\frac{r_i}{p_i}} + C_2 meas(\{|u_n - u_m| > \eta\})^{1-\frac{r_i}{s_i}} .$$

Comme $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $L^{\overline{s^*}}(\Omega)$, et puisque la dernière inégalité est valable pour chaque $\eta > 0$, on conclut que la suite $\{\partial_i u_n\}_n$ est une suite de Cauchy dans $L^{r_i}(\Omega)$ et la preuve en découle.

□

Remarque 2.4. On peut donner des résultats de régularité sur les dérivées premières de la solution de la manière suivante : Dans le problème (2.2), utilisez u_n^γ comme fonction test, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n \partial_i (u_n^\gamma) \leq C.$$

Inégalité qui peut être réécrite de la manière suivante

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\partial_i u_n^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right|^{p_i} \leq C,$$

et donc

$$\left|\partial_i u_n^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right| \in L^{p_i}(\Omega).$$

La dernière estimation ne signifie pas que u appartient à un espace de Sobolev anisotrope, mais elle ne donne qu'une estimation des dérivés du premier ordre de u, $\left|\partial_i u^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right| \in L^{p_i}(\Omega)$.

2.3.3 Cas $\gamma > 1$

Théorème 2.6. Soit $f \in L^1(\Omega)$, alors il existe une solution u pour (2.1) , appartenant à l'espace $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{N(\gamma-1+\overline{p})}{N-\overline{p}}$.

Démonstration. Comme dans le cas $\gamma < 1$, on utilise $f_n = T_n(f)$, et soit $u_n \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution de (2.1) , on se propose u_n^γ comme une fonction test alors on obtient pour tout $i = 1, 2, ..., N$

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma-1} \leq C.$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev (1.3) avec les exposants

$$\begin{cases} t_i p_i = \gamma - 1 \\ r = s = \dfrac{N(\gamma-1+\overline{p})}{N-\overline{p}} \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{\gamma_i(N-1) - 1 + \frac{1}{p_i}}{t_i + 1} \end{cases},$$

par un calcul simple, on peut vérifier que pour ces valeurs la condition

$$\sum_{i=1}^N \gamma_i = 1$$

est satisfaite, et ainsi

$$u_n \in L^s(\Omega)$$

et par la suite

$$u \in L^s(\Omega).$$

□

Remarque 2.5. En utilisant u_n^γ comme fonction test dans (2.2), on a

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} (u^{\gamma-1}) \leq C,$$

d'après le principe du Maximum fort

$$C(K) \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} \leq C,$$

pour tout compact $K \subset\subset \Omega$. On obtient ainsi une faible convergence de u_n vers u dans $W^{1,(p_i)}(\Omega_1)$, pour tout sous-ensemble ouvert $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.

Chapitre 3

Problème Anisotrope avec non-linéarité singulière ayant un exposant variable

Sommaire

3.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre le problème suivant :

$$\begin{cases} -Lu &= \dfrac{f}{u^{\gamma(x)}} \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u &\geq 0 \qquad\quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \, \partial_i u \right],$$

$\gamma(x) > 0$ est supposée être une fonction régulière, par exemple $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$, et Ω est un domaine régulier borné dans $I\!R^N$. Nous supposerons sans perte de généralité que $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue approprié $L^m(\Omega)$.

Quand l'opérateur différentiel est semi-linéaire, et $\gamma(x) = \gamma$, Boccardo et Orsina dans leur papier remarquable [14], ont obtenu l'existence et la régularité de la solution, ce qui a été généralisé au cas du p-laplacien dans [29], et au cas de l'opérateur anisotrope L dans [54].

Dans un travail très récent [22] les auteurs considèrent un problème elliptique semi-linéaire singulier avec l'exposant variable $\gamma(x)$, ils ont obtenu l'existence et la régularité de la solution, sous certaines conditions sur le comportement de la fonction $\gamma(x)$ au voisinage du bord de Ω.

Il existe une littérature abondante, consacrée à l'étude de l'opérateur anisotrope L, qui trouve de nombreuses applications dans la dynamique des fluides et les phénomènes physiques à diffusion anisotrope, citons par exemple [42], [32], [33], [34] et les références qu'ils contiennent.

Lorsqu'une non-linéarité singulière est considérée en interaction avec différents types d'opérateurs différentiels comme le Laplacien ou le p-Laplacien, nous invitons le lecteur à voir les articles. [1], [27], [17], [18], [34], [46], [70], [69] et [75].

Le problème (3.1) est associé aux espaces de Sobolev anisotropes introduits dans la définition 1.5

Définition 3.1. On dit que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution d'énergie de (3.1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

et nous dirons que u est une solution faible de (3.1) si $\partial_i u^{p_i-1} \in L^1(\Omega)$, $fu^{\gamma(x)} \in L^1_{loc}(\Omega)$, et on a l'identité

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Le cadre fonctionnelle utilisé ici fait intervenir les espaces de Sobolev anisotropes introduit dans le chapitre préliminaire (Définition 1.5). Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux travaux antérieurs [52], [54], [72] et [82].

Dans le but de démontrer l'existence de la solution du problème (3.1), et vu que ce problème n'a pas de structure variationnelle, on procède par une approximation du problème.

3.2 Problème d'approximation

Tous les résultats obtenus dans cette section sont des conséquences directes de ceux présentés dans [14] et [54], mais pour faciliter la lecture, nous les présentons en détail.

Considérons d'abord le problème d'approximation suivant

$$\begin{cases} -Lu_n &= \dfrac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} & \text{dans } \Omega \\ u_n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_n &\geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $f_n = T_n(f)$.

Lemme 3.1. Le problème (3.2) admet une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Démonstration. Nous suivrons le même raisonnement que dans [14].

Fixons $n \in \mathbb{N}$, et soit $v \in L_{\overline{p}^*}(\Omega)$. Considérons l'équation

$$-Lw = \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}}, \tag{3.3}$$

il est clair que le problème précédent admet une solution unique chaque fois que le côté droit appartient à $L^s(\Omega)$ avec $s \geq p'_\infty$ voir par exemple [32] et [33]. Notons $w = S(v)$,

en utilisant w comme fonction test dans (3.3), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i w|^{p_i} = \int_\Omega \frac{wf_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} \leq n^{\gamma(x)+1} \int_\Omega |w|$$

par l'inégalité de Sobolev (1.1),

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}^{p_N} \leq C \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i w|^{p_i} ,$$

par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} |w| \leq \left(\int_{\Omega} |w|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^*}} .$$

Par conséquent

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}^{p_N} \leq C n^{\gamma(x)+1} \|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} ,$$

et donc

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C' \left(n^{\gamma(x)+1} \right)^{\frac{1}{p_N - 1}} = R_N,$$

ce qui signifie que la boule de rayon R_N dans $L^{\overline{p}^*}(\Omega)$ est invariante par S, et donc, par l'injection de Sobolev et le théorème du point fixe de Schauder, nous concluons que le problème d'approximation (3.2) admet une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, pour tout n fixé. □

Lemme 3.2. La suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport a n.

Démonstration. Rappelons que $f_n = T_n(f)$ et donc $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$

$$-Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} \leq \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}}$$

as

$$-Lu_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}}$$

et donc on a

$$\begin{aligned} -Lu_n + Lu_{n+1} &\leq f_{n+1} \left[\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}} - \frac{1}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}} \right] \\ &\leq f_{n+1} \left[\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)} - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)} \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}} \right] \end{aligned}$$

en utilisant $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test dans la dernière inégalité, le second membre

$$f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}}{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma(x)}}\right](u_n-u_{n+1})^+\leq 0.$$

Maintenant, en tenant compte des problèmes associés à u_n et a u_{n+1}, il s'en suit que

$$\int_\Omega (-Lu_n+Lu_{n+1})(u_n-u_{n+1})^+\leq 0.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n-|\partial_i u_{n+1}|^{p_i-2}\partial_i u_{n+1}\right)\partial_i(u_n-u_{n+1})^+\leq 0.$$

En intégrant sur le sous-ensemble de Ω où $u_n\geq u_{n+1}$ et en utilisant l'inégalité suivante pour $p_i\geq 2$

$$C_0\,|\partial_i(u_n-u_{n+1})|^{p_i}\leq\left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n-|\partial_i u_{n+1}|^{p_i-2}\partial_i u_{n+1}\right)\partial_i(u_n-u_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left|\partial_i(u_n-u_{n+1})^+\right|^{p_i}\leq 0.$$

D'où

$$u_n\leq u_{n+1},$$

ce qui nous permet de conclure que $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n. □

Remarque 3.1. Nous nous limitons au cas $p_i\geq 2$ car (à notre connaissance), L'opérateur L vérifie un principe du Maximum fort uniquement dans le cas $p_i\geq 2$ voir par exemple [32], le principe du Maximum sera nécessaire dans la suite.

Lemme 3.3. Pour tout $n\in I\!N$, u_n la solution du problème d'approximation (3.2), est tel que $u_n\in L^\infty(\Omega)$ et pour tout $K\subset\subset\Omega$, $u_n\geq C_K>0$.

Démonstration. Par quelques modifications dans la théorie des opérateurs de "Leray-Lions", on peut montrer l'existence d'une solution à

$$-Lu_1=\frac{f_1}{(u_1+1)^{\gamma(x)}}$$

et donc

$$-Lu_1=\frac{f_1}{(\|u_1\|_\infty+1)^{\gamma(x)}}\geq 0$$

Le principe du maximum fort, et la monotonicité de $\{u_n\}_n$ donne que $u_n \geq C_K > 0$. L'estimation de $\{u_n\}_n$, dans $L^\infty(\Omega)$ est une conséquence directe du résultat de Stampachia [79], comme dans [14]. □

3.3 Passage à la limite

Pour δ fixé, soit $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$

Théorème 3.1. Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N(\overline{p}-1)+\overline{p}}$ et $f \in L^s(\Omega)$, supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(x) \leq 1$ dans Ω_δ, alors la suite $\{u_n\}_n$ des solutions de (3.2), est borné dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Démonstration. Posons $\omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$, par les résultats précédents, on sait que $u_n \geq C_{\omega_\delta} > 0$. Maintenant utilisant u_n comme fonction test dans (3.2)on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} &= \int_\Omega \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n \\
&= \int_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n + \int_{\omega_\delta} \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \int_{\overline{\Omega_\delta}} f(x) u_n^{1-\gamma(x)} + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \int_{\overline{\Omega_\delta}\cap\{u_n\leq 1\}} f(x) + \int_{\overline{\Omega_\delta}\cap\{u_n\geq 1\}} f(x) u_n + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\|C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega f(x) u_n
\end{aligned}$$

Utilisant les inégalités de Hölder et Sobolev, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + C\left(1 + \left\|C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|f\|_{L^s(\Omega)} \left[\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i}\right]^{\frac{1}{p_N}}$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} \leq C$$

où C est une constante indépendante de n. □

Théorème 3.2. Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N(\overline{p}-1)+\overline{p}}$ and $f \in L^s(\Omega)$, supposons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\gamma(x) \leq 1$ in Ω_δ, alors le problème (3.1) possède une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Démonstration. Par la proposition précédente $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, donc (à une sous-suite près) $\{u_n\}_n$ converge faiblement vers un certain u dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. D'autre part, $\{u_n\}_n$ converge fortement dans $L^{\theta}(\Omega)$ for $\theta < \overline{p}^*$, ainsi $\{u_n\}_n$ converge vers u presque partout dans Ω. Donc on a la convergence pour chaque $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n \partial_i \varphi = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi$$

Du fait que

$$0 \leq \left| \frac{f_n(x)\varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} \right| \leq \left\| \varphi C_{\omega}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)} f(x)$$

pour toute $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, d'autre part $\varphi \neq 0$ et sur l'ensemble où $u_n \geq C_{\omega}$, ω étant le support de φ; le théorème de Lebesgue de convergence dominée nous permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} \frac{f_n(x)\varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} = \int_{\Omega} \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}}$$

par la suite, la limite u de la suite $\{u_n\}_n$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}}.$$

$\square$

Théorème 3.3. Supposons que pour $\gamma^* > 1$ et $\delta > 0$ on a $\|\gamma\|_{L^{\infty}(\Omega_\delta)} \leq \gamma^*$. À condition que $f \in L^s(\Omega)$ avec $s = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{N(\overline{p} - 1) + \overline{p}\gamma^*}$, le problème (3.1) admet une solution u dans $L^{\alpha}(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$, appartenant a $W_{loc}^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Démonstration. Utilisons $u_n^{\gamma^*}$ comme fonction test dans (3.2), alors on obtient pour tout $i = 1, 2, ..., N$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} &\leq \int_{\Omega_\delta} f(x) u_n^{\gamma^*-\gamma(x)} + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n^{\gamma^*} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\| C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right) \int_{\Omega} f(x) u_n^{\gamma^*} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\| C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^{\infty}(\Omega)}\right) \left(\int_{\Omega} f^s(x)\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\Omega} u_n^{\gamma^*\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

avec $\beta = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})\gamma^*}$, et donc

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^*\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

Ainsi

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1}\right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^*\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

ce qui implique que

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1}\right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^*\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}} = \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{N}{\overline{p}}}$$

avec le choix suivant des exposants

$$\begin{cases} t_i p_i = \gamma^* - 1 \\ r = \alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})} \\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{\gamma_i (N-1) - 1 + \frac{1}{p_i}}{t_i + 1} \end{cases}$$

l'inégalité de Sobolev (1.3) donne :

$$\left(\int_\Omega u_n^{\alpha}\right)^{\frac{N}{\overline{p}}-1} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{N}{\overline{p}}}$$

et donc

$$\left(\int_\Omega u_n^{\alpha}\right)^{1-\frac{\overline{p}}{N}} \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

du fait que

$$\frac{1}{\beta} < 1 - \frac{\overline{p}}{N}$$

on conclut que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $L^\alpha(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$ et par le théorème de la convergence monotone, $\{u_n\}_n$ converge fortement vers $u \in L^\alpha(\Omega)$.

D'autre part en utilisant $u_n^{\gamma^*}$ comme fonction test dans (3.2) on a

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} \leq C$$

par le principe du maximum fort on a pour tout compact $K \subset\subset \Omega$

$$C_K^{\gamma^*-1} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_n| \leq C$$

on obtient ainsi une convergence faible de $\{u_n\}_n$ vers u dans $W_{loc}^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Pour compléter la preuve, nous suivons les mêmes étapes que dans la proposition précédente.

$\square$

Chapitre 4

Problème doublement anisotrope avec non-linéarité changeant de signe

Sommaire

4.1 Introduction

On considère dans ce chapitre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] - \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \right] = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, nous supposerons que f remplit certaines hypothèses appropriées, $1 < p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et $1 < q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_N$.

Nous allons souvent utiliser la notation

$$L_{(p_i)} u = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right],$$

Il existe une littérature abondante sur l'opérateur anisotrope. Lorsqu'il est considéré avec des termes linéaires, non linéaires ou singuliers, nous invitons le lecteur à voir : [32, 33, 34, 38, 42, 54, 70]

f est supposée être telle que

(H1) f est une fonction continue telle que $f(0) \geq 0$, et il y a $0 < a_1 < b_1 < a_2 < ... < b_{m-1} < a_m$ les zeros de f tel que

$$\begin{cases} f & \leq & 0 & \text{dans } (a_k, b_k) \\ f & \geq & 0 & \text{dans } (b_k, a_{k+1}) \end{cases}$$

(H2) $\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt > 0; \;\; \forall k = 1, 2, .., m-1.$

Ce type d'hypothèses a été introduit par [28, 30, 49], dans le but d'étudier le problème

$$\begin{cases} -\triangle u & = & \lambda f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Plus récemment, des résultats généralisés ont été obtenus dans [25] pour le cas du $p\&q$-laplacien,

$$\begin{cases} -\triangle_p u & - & \triangle_q u = \lambda f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et dans le cas du ϕ-laplacien dans [77], où le problème considéré

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) & = & \lambda f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ϕ étant une fonction remplissant certaines conditions appropriées.

Il est à noter que l'opérateur anisotrope et que l'opérateur doublement anisotrope considéré dans le présent chapitre ne peuvent pas être obtenus en tant que cas particulier de ceux cités précédemment, il possède sa propre structure, comme nous le présenterons dans ce chapitre.

Dans l'ensemble du chapitre, C désignera une constante qui peut changer d'une ligne à l'autre.

4.2 Résultats Préliminaire

Le problème (4.1) est associé aux espaces de Sobolev anisotropes suivants.

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) ; \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

et

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

muni de la norme usuelle

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

Comme nous avons à faire à un opérateur doublement anisotrope, l'espace fonctionnel naturel est

$$X = W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,(q_i)}(\Omega)$$

muni de la norme

$$\|v\|_X = \|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,(q_i)}(\Omega)} .$$

Définition 4.1. On dira que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution faible (4.1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \lambda \int_{\Omega} f(u)\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) .$$

Les inégalités algébriques suivantes nous seront très utiles par la suite :

- Il existe un $C > 0$ ne dépendant pas de $\rho \in (0,1)$ tel que pour $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2...N$ donnés on a :

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \rho \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^{p_i}}{p_i} \geq C \rho^{p_N} \tag{4.2}$$

- Pour $p_i \geq 2$

$$C |a-b|^{p_i} \leq \left(|a|^{p_i-2} a - |b|^{p_i-2} b \right) (a-b) \tag{4.3}$$

- Pour $1 < p_i \leq 2$

$$C \frac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p_i}} \leq \left(|a|^{p_i-2} a - |b|^{p_i-2} b \right) (a-b) \tag{4.4}$$

En vue d'appliquer les inégalités ci-dessus, tout au long de ce chapitre, nous supposerons que tous les p_i sont soit tous tels que $p_i \geq 2$ ou tels que $1 < p_i \leq 2$ et de même pour les q_i pour $i = 1, ..., N$.

Lemme 4.1. Soit $g \in C(\mathbb{R})$ une fonction continue et soit $s_0 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} g(s) &\geq 0 \quad \text{si } s \in (-\infty, 0) \\ g(s) &\leq 0 \quad \text{si } s \in [s_0, +\infty) \end{aligned}$$

alors si u est une solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right] - \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{q_i - 2} \partial_i u \right] & = & \lambda g(u) & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.5}$$

elle vérifie $u \geq 0$ presque partout dans Ω, $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\|u\|_{L^\infty} < s_0$.

Démonstration. Rappelons que $u = u^+ - u^-$ où $u^- = \max(-u, 0)$ et $u^+ = \max(0, u)$; comme

$$\partial_i u^- = \left\{ \begin{array}{cl} -\partial_i u & \text{si } u < 0 \\ 0 & \text{si } u \geq 0 \end{array} \right. \tag{4.6}$$

on a que $u^- \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ pour chaque $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. En utilisant u^- comme fonction test dans (4.5) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i u^- + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{q_i - 2} \partial_i u \partial_i u^- = \int_{\Omega} g(u) u^-$$

ceci donne

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u<0]} |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u<0]} |\partial_i u|^{q_i} = \int_{\Omega \cap [u<0]} g(u) u$$

par définition de g, on a $g(u)u \leq 0$ pour $u < 0$ alors

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u<0]} |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u<0]} |\partial_i u|^{q_i} \leq 0$$

et donc nécessairement l'ensemble $(\Omega \cap [u < 0])$ est de mesure nulle, et ainsi $u = u^+ \geq 0$.

D'autre part, observez que

$$\partial_i (u - s_0)^+ = \begin{cases} -\partial_i u & \text{si } u > s_0 \\ 0 & \text{si } u \leq s_0 \end{cases}$$

on a que $(u - s_0) \in X$ u$\in X$. et en utilisant $(u - s_0)^+$ comme fonction test dans (4.5) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i (u - s_0)^+ + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{q_i - 2} \partial_i u \partial_i (u - s_0)^+ = \int_{\Omega} g(u) (u - s_0)^+$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u > s_0]} |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u > s_0]} |\partial_i u|^{q_i} = \int_{\Omega \cap [u > s_0]} g(u) (u - s_0)$$

par définition de g, $g(u) (u - s_0) \leq 0$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u > s_0]} |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \cap [u > s_0]} |\partial_i u|^{q_i} \leq 0$$

et donc nécessairement l'ensemble $(\Omega \cap [u > s_0])$ est un ensemble de mesure nulle, et donc $u \leq s_0$. $\square$

4.3 Résultat d'existence et de multiplicité

Pour tout $k = 1, 2, .., m - 1$, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right] - \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right] = \lambda f_k(u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.7}$$

où

$$f_k(s) = \begin{cases} f(0) & \text{si } s \leq 0 \\ f(s) & \text{si } 0 \leq s \leq a_k \\ 0 & \text{si } s > a_k \end{cases}$$

Proposition 4.1. Il existe $\overline{\lambda} > 0$ tel que pour tout $\lambda \in (\overline{\lambda}, +\infty)$, le problème (4.7) possède une solution non-négative $u = u_{k,\lambda}$ tel que $\|u_k\|_{L^\infty} \leq a_k$.

Démonstration. Comme conséquence directe du Lemme précédent on a $\|u_k\|_{L^\infty} \leq a_k$.

Soit
$$\Phi_{k,\lambda}(u) := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i} - \lambda \int_\Omega F_k(u),$$

où $F_k(t) = \int_0^t f_k(s)ds$, l'ensemble $\boldsymbol{C}_{k,\lambda}$ des points critiques de $\Phi_{k,\lambda}(u)$ correspond à l'ensemble des solutions de (4.7). Comme f_k est une fonction bornée on a

$$m_k |t| \leq \int_0^t m_k ds \leq F_k(t) \leq \int_0^t M_k ds \leq M_k |t| ,$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Phi_{k,\lambda}(u) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i} - \lambda \int_\Omega F_k(u) \\ &\geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i} - \lambda M_k \int_\Omega |u| , \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder on obtient que :

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i} - \lambda M_k \|u\|_{L^{\overline{p}^*}} ,$$

par l'inégalité de Sobolev

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i} - \lambda M_k C \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^{p_i}} ,$$

comme $p_N \geq p_i$ pour tout i

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \geq \frac{1}{p_N} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^{p_i}}^{p_i} + \frac{1}{q_N} \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^{q_i}}^{q_i} - \lambda M_k C \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^{p_i}} ,$$

du fait que

$$\|u\|_X \to +\infty \Rightarrow \|\partial_i u\|_{L^{p_i}} \to +\infty \text{ ou } \|\partial_i u\|_{L^{q_i}} \to +\infty \text{ pour certains } i,$$

on obtient la coercivité de $\Phi_{k,\lambda}(u)$ que

$$\Phi_{k,\lambda}(u) \to +\infty \text{ quand } \|u\|_X \to +\infty.$$

D'autre part, comme $\Phi_{k,\lambda}(u)$ est continue, elle est aussi semi continue inférieurement, et donc par le théorème de Weirstrass, il est également possible de montrer qu'une suite de Palais Smale $\{u_n\}_n$ converge fortement, en effet $\{u_n\}_n$ est bornée dans X

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } X,$$

ainsi

$$u_n \to u \text{ fortement dans } L^r(\Omega) \text{ pour tout } 1 \le r < \overline{p}^* ,$$

et en particulier

$$\int_\Omega |u_n| \to \int_\Omega |u| ;$$

prenons $(u_n - u)$ comme fonction test dans (4.7) on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i (u_n - u) + \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \partial_i (u_n - u) = \lambda \int_\Omega f_k(u)(u_n - u)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\int_\Omega \left(\left(|\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right) \partial_i (u_n - u) + \partial_i u_n |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u - |\partial_i u|^{p_i} \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\int_\Omega \left(\left(|\partial_i u_n|^{q_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \right) \partial_i (u_n - u) + \partial_i u_n |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u - |\partial_i u|^{q_i} \right) \right] \\ = \; & \lambda \int_\Omega f_k(u)(u_n - u), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[\int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right) \partial_i (u_n - u) + \int_\Omega \left(\partial_i u_n |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u - |\partial_i u|^{p_i} \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^N \left[\int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{q_i-2} \partial_i u_n - |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u \right) \partial_i (u_n - u) + \int_\Omega \left(\partial_i u_n |\partial_i u|^{q_i-2} \partial_i u - |\partial_i u|^{q_i} \right) \right] \\ = \; & \lambda \int_\Omega f_k(u)(u_n - u) \end{aligned}$$

par l'inégalité (4.3) pour $p_i, q_i > 2$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{p_i}+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{p_i}\right)+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{q_i}$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{q_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{q_i}\right)\leq\lambda C\int_{\Omega}f_k(u)(u_n-u)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{p_i}+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{q_i}&\leq\lambda C\int_{\Omega}f_k(u)(u_n-u)\\ -\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{p_i}\right)&-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{q_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{q_i}\right),\end{aligned}$$

puisque $\{u_n\}_n$ converge faiblement alors

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{p_i}\right)-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(\partial_i u_n\,|\partial_i u|^{q_i-2}\,\partial_i u-|\partial_i u|^{q_i}\right)=o(1)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{p_i}+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i(u_n-u)|^{q_i}&\leq\lambda C\int_{\Omega}f_k(u)(u_n-u)+o(1)\\&\leq\lambda CM_k\int_{\Omega}(u_n-u)+o(1)\end{aligned}$$

comme $u_n\to u$ fortement dans $L^r(\Omega)$ pour tout $1\leq r<\overline{p}^*$, on conclut que

$$\|u_n-u\|_X\to 0.$$

Le même résultat peut être obtenu pour les cas ($p_i<2$ et $q_i>2$) et ($p_i<2$ et $q_i<2$) en utilisant de manière similaire l'inégalité (4.4) au lieu de (4.3), ce qui termine la preuve. □

Théorème 4.1. Il existe $\overline{\lambda}>0$ tel que pour tout $\lambda\in(\overline{\lambda},+\infty)$, le probème (4.1) possède au moins $(m-1)$ solutions non-négatives u_i tel que $u_i\in X$ et $a_i\leq\|u_i\|_{L^\infty}\leq a_{i+1}$.

Démonstration. Soit u une solution de (4.7), donc par le lemme 1 on a $u\in L^\infty(\Omega)$ et $0\leq u<a_{k-1}$ presque partout dans Ω ainsi $f_{k-1}(u)=f(u)$ et donc u est aussi

une solution de (4.1). Pour prouver la dernière partie du théorème, on pose que pour chaque $k \in \{2, ...m\}$ on a $\lambda_k > 0$, tel que pour tout $\lambda > \lambda_k$ on a $u_{k,\lambda} \notin \boldsymbol{C}_{k-1,\lambda}$ où

$$\Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda}) = \min_{v \in X} \Phi_{k,\lambda}(v),$$

soit $\delta > 0$ et considérons

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega,\ dist(x, \partial\Omega) < \delta\},$$

et

$$\alpha_k = F(a_k) - \max_{0<s<a_{k-1}} |F(s)| = F(a_k) - C_k,$$

d'aprés l'hypothèse (H2) $\alpha_k > 0$. Considerons $w_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$0 \leq w_\delta \leq a_k,$$

et

$$w_\delta = a_k,\ \text{où } x \in \Omega \setminus \Omega_\delta,$$

on a

$$\int_\Omega F(w_\delta) \geq \int_\Omega F(a_k) - 2C_k |\Omega_\delta|,$$

ce qui donne que

$$\int_\Omega F(w_\delta) - \int_\Omega F(u) \geq \alpha_k |\Omega| - 2C_k |\Omega_\delta|,$$

puisque $|\Omega_\delta| \to 0$ quand $\delta \to 0$ il existe certainement un δ tel que %

$$\beta_k = \alpha_k |\Omega| - 2C_k |\Omega_\delta| > 0$$

pour ce δ on pose $w_\delta = w$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,\lambda}(w) - \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{q_i} - \lambda \int_\Omega F_k(w) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u_{k-1,\lambda}|^{p_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i u_{k-1,\lambda}|^{q_i} + \lambda \int_\Omega F_k(u_{k-1,\lambda}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{q_i} - \lambda \int_\Omega (F_k(w) - F_k(u_{k-1,\lambda})) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{p_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{q_i} \int_\Omega |\partial_i w|^{q_i} - \lambda \beta_k,
\end{aligned}$$

pour λ assez grand on a

$$\Phi_{k,\lambda}(w) - \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}) < 0$$

ceci donne

$$\Phi_{k,\lambda}(w) < \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda})$$

donc

$$\Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda}) \leq \Phi_{k,\lambda}(w) < \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda})$$

nous avons donc prouvé que $u_{k,\lambda}$ et $u_{k-1,\lambda}$ sont deux solutions distinctes de (4.1).

Supposons maintenant par l'absurde que

$$0 \leq u_{k,\lambda} < a_{k-1}$$

on doit avoir nécessairement

$$\Phi_{k-1,\lambda}(u_{k-1,\lambda}) \leq \Phi_{k-1,\lambda}(u_{k,\lambda}) = \Phi_{k,\lambda}(u_{k,\lambda})$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse, et en conclusion

$$a_{k-1} < u_{k,\lambda} \leq a_k.$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque 4.1. Il est clair que sous les mêmes conditions sur f, tous les résultats obtenus ici sont toujours valables pour le problème simplement anisotrope suivant :

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] &= \lambda f(u) \qquad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons traité l'existence, la régularité, et la multiplicité de solutions pour une certaine classe de problèmes anisotropes.

Ces problème n'étant pas homogènes, pas linéaires, et encore moins symétriques leur étude n'a pas été toujours simple, à cause de l'absence de résultats connus pour d'autres opérateurs tels que le Laplacien, ou le p-Laplacien, nous citerons par exemple l'absence d'une théorie spectrale, existence de résultat uniquement partiel pour le principe de Harnack et du maximum fort, l'absence en général d'un résultat analogue au principe de Hopf.

Nous aurions aussi souhaité étendre l'étude au cas parabolique, mais cela n'a pas été possible dû à la difficulté de ce cas.

Nous avons donc comme perspective de continuer ce travail pour étudier les problèmes suivants :

1. Le cas parabolique

$$u_t - \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \right] = f(u,x,t), \quad \text{dans } \Omega_T,$$

avec des conditions aux bords et aux limites convenables.

2. Étude de problèmes avec terme singulier et données mesures

$$\begin{cases} -Lu &= \dfrac{\mu}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u &\geq 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -Lu &= \dfrac{f}{u^\gamma} + \mu \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

μ étant une mesure.

3. Étude d'un problème anisotrope non-local avec terme singulier

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{N}[M||\partial_i u||_{p_i}^{p_i}]^{p_i-1}\partial_i\left[|\partial_i u|^{p_i-2}\,\partial_i u\right] &= \dfrac{f(x)}{u^\gamma} \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ u &\geq 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous espérons que cette thèse sera une contribution, même infime à la théorie des opérateurs anisotropes et qu'elle sera utile pour les chercheurs qui souhaitent travailler dans ce domaine.

Bibliographie

[1] B. Abdellaoui, A. Attar, S.E. Miri, *Non linear singular elliptic problem with gradient term and general datum*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 409.1 (2014) : 362-377.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacien with a critical potential*, Ann. di .Math, **182**, (2003), 247-270.

[3] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, (1975).

[4] N.E. Alaa, M. Pierre, *Weak solutions of some quasilinear elliptic equations with data measures*, SIAM J. Math. Anal, (24), (1993), 23-35.

[5] C.O. Alves, A. EL Hamidi, *Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent* Differential and Integral Equations, vol. 21, (2008), no 1-2, 25-40.

[6] F. Antoci, *Some necessary and some sufficient conditions for the compactness of the embedding of weighted Sobolev spaces*, Ricerche di Matematica, **LII**, (2003), 55-71

[7] A. Bamberger, B. Engquist, L. Halpern, P. Joly, *Parabolic Wave Equation Approximations in Heterogenous Media*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 48(1), (1988), 99-128.

[8] P. Baras, M. Pierre, *Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, Elsevier Masson, (1985), 185-212.

[9] C. Baron, S. Naili, *Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide.* Comptes Rendus Mécanique, 336(9), (2008), 722-730.

[10] M. Belloni, B. Kawohl, *The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as* $p \to \infty$, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, (2004), vol. 10, no 1, 28-52.

[11] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vázquez, *An* L^1*-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 22(2),(1995), 241-273.

[12] L. Boccardo, , T. Gallouët, P. Marcellini, *Anisotropic equations in* L^1, Differential and Integral Equations 9.1 (1996), 209-212.

[13] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for a nonlinear elliptic equations with a measure data*, Annales de l'I. H. P, section C, tome 13, (1996), 539-551.

[14] L. Boccardo, L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 37, (2009), 363-380.

[15] M. Bojowald, H. H. Hernàndez, H. A. Morales Técotl, *Perturbative degrees of freedom in loop quantum gravity : anisotropies*, Classical Quantum Gravity 23 (2006), no 10, 3491-3516

[16] B. Bougherara and J. Giacomoni, *Existence of mild solutions for a singular parabolic equation and stabilization*, Adv. Nonlinear Anal. 4 no. 2, (2015), 123-134.

[17] B. Brandolini, F. Chiacchio, C. Trombetti, *Symmetrization for singular semilinear elliptic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 193 (2014), no. 2, 389-404.

[18] B. Brandolini, V. Ferone, B. Messano, *Existence and comparison results for a singular semilinear elliptic equation with a lower order term*, Ric. Mat. 63 (2014), no. 1, 3-18.

[19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, (1973).

[20] H. Brezis, X. Cabré, *Some simple nonlinear PDE's without solutions*, Bollettino della Unione Matematica Italiana-B, (1998), no 2, 223-262.

[21] H. Brezis, M. Marcus, *Hardy's inequalities revisited*, Annali della Scuola Seperior do Piza Classe di Scienze 4 série, tome 25, (1997), 217-237.

[22] J. Carmona, P. J. A. Martínez-Aparicio, *Singular Semilinear Elliptic Equation with a Variable Exponent*, Advanced Nonlinear Studies. DOI : 10.1515/ans-2015-5039, March 2016.

[23] F. Catrina, *Nonexistence of positive radial solutions for a problem with singular potential*, Adv. Nonlinear Anal. 3 (2014), no. 1, 1-13.

[24] F. Cîrstea, M. Ghergu, V. Radulescu, *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problems of Lane-Emden-Fowler type*, J. Math. Pures Appl. (9) 84 (2005), no. 4, 493-508.

[25] A.S.S. Corrêa, F. J. S. Corrêa, *Multiple ordered positive solutions of an elliptic problem involving the pq-Laplacian*, J. Convex Anal 21.4 (2014), 1023-1042.

[26] Y. Coudière, C. Pierre, R. Turpault. *A DDFV scheme for anisotropic and heterogeneous elliptic equations, application to a bio-mathematics problem : electrocardiogram simulation*, 5th Conference on Finite volumes for complex applications, Problems and perspectives, (2008).

[27] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, L. Tartar, *On a Dirichlet problemwith a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2 (1997) 193-222.

[28] E. N. Dancer, K. Schmitt *On positive solutions of semilinear elliptic equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, 101(3), (1987), 445-452.

[29] L. M. De Cave, *Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Asymptotic Analysis 84 (2013), 181-195.

[30] D. De Figueiredo, *On the existence of multiple ordered solutions of nonlinear eigenvalue problems*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 11.4 (1987), 481-492.

[31] D. De Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Berlin : Springer, (1989).

[32] A. Di Castro, *Elliptic problems for some anisotropic operators*, Ph.D. Thesis, University of Rome Sapienza, a. y. 2008/2009.

[33] A. Di Castro, *Existence and regularity results for anisotropic elliptic problems*, Advanced Nonlinear Studies, (2009), vol. 9, no 2, 367-393.

[34] A. Di Castro, *Anisotropic elliptic problems with natural growth terms*, Manuscripta mathematica 135 (3-4) (2011), 521-543.

[35] A. Di Castro, E. Montefusco, *Nonlinear eigenvalues for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis : Theory Methods & Applications, (2009), vol. 70, no 11, 4093-4105.

[36] L. Dupaigne, M. Ghergu, V. Radulescu, *Lane-Emden-Fowler equations with convection and singular potential*, J. Math. Pures Appl. (9) 87 (2007), no. 6, 563-581.

[37] I. Ekeland, *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (1974), vol. 47, no 2, 324-353.

[38] A. El Hamidi, J. M. Rakotoson, *Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, Vol. 24, (2007), No. 5, 741-756.

[39] A. EL Hamidi, J.M. Rakotoson, *On a perturbed anisotropic equation with a critical exponent*, Ricerche di matematica, (2006), vol. 55, no 1, 55-69.

[40] E. Eisenriegler, *Anisotropic colloidal particles in critical fluids*, J. Chem. Phys. 121 (2004), 32-99.

[41] E. Eisenriegler, *Anisotropic colloidal particles interacting with polymers in a good solvent*, J. Chem. Phys. 124 (2006), 144-912.

[42] I. Fragalà, F. Gazzola, B. Kawohl, *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations*, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. Vol. 21, (2004), no 5, 715-734.

[43] I. Fragalà, F. Gazzola, G. Lieberman, *Regularity and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations in convex domains*, Discrete Contin. Dyn. Syst. suppl. (2005), 280-286.

[44] T. Gallouet, L. Gastaldo, R. Herbin, J.-C. Latché, *An unconditionally stable pressure correction scheme for compressible barotropic Navier-Stokes equations*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 42, (2008), 303-331.

[45] M. Ghergu, V. Radulescu, *Sublinear singular elliptic problems with two parameters*, J. Differential Equations 195 (2003), no. 2, 520-536.

[46] M. Ghergu, V. Radulescu, *Singular elliptic problems*, Oxford Univ. Press, 2008.

[47] M. Giaquinta, *Growth conditions and regularity, a counter example*, manuscripta mathematica, (1987), vol. 59, no 2, 245-248.

[48] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren 224, Springer, (1983).

[49] P. Hess, *On multiple positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Communications in Partial Differential Equations, 6.8 (1981), 951-961.

[50] M. H. Hoyos, *Segmentation anisotrope 3D pour la quantification en imagerie vasculaire par résonance magnétique*, (Doctoral dissertation, INSA de Lyon). (2002).

[51] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, 1993.

[52] S.N. Kruzhkov, I.M. Kolodii, *On the theory of embedding of anisotropic Sobolev spaces*, Russian Math. Surveys 38 (1983), 188-189.

[53] A. Kufner, B. Opic, *Hardy-type inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow, (1990).

[54] A.R. Leggat, S.E.H. Miri, *Anisotropic problem with singular nonlinearity*, Complex Variables and Elliptic Equations 61.4 (2016), 496-509.

[55] J. Leray, J.L. Lions, *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Equazioni differenziali non lineari, Springer, Berlin, Heidelberg, (2010), 1-22.

[56] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes. II*, Annales de l'institut Fourier, (1961), 137-178.

[57] N. H. Loc and K. Schmitt, *On positive solutions of quasilinear elliptic equations*, Differential Integral Equations 22 (2009), 829-842.

[58] P. Marcellini, *Un exemple de solution discontinue d'un problème variationnel dans le cas scalaire*, preprint n. 11 dell'Ist. Mat. Univ. Firenze, (1987).

[59] L. B. P. Marcellini, *L^*-Regularity for Variational Problems with Sharp Non Standard Growth Conditions*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, (1990), vol. 7, no 4-A, 219-226.

[60] P. Marcellini, *Un exemple de solution discontinue d'un problème variationnel dans le cas scalaire*, preprint n. 11 dell Ist. Mat. Univ. Firenze, 1987.

[61] G. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, (1999), 741-808.

[62] V. G. Maz'jadams, *Sobolev spaces*, Springer Berlin, (1985).

[63] M. Mihailescu, P. Pucci, V. Radulescu, *Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2008), vol. 340, no 1, 687-698.

[64] M. Mihailescu, P. Pucci, V. Radulescu, *Nonhomogeneous boundary value problems in anisotropic Sobolev spaces*, Comptes Rendus Mathematique, (2007), vol. 345, no 10, 561-566.

[65] M. Mihailescu, V. Radulescu, *Continuous spectrum for a class of nonhomogeneous differential operators*, Manuscripta Mathematica, (2008), vol. 125, no 2, 157-167.

[66] M. Mihailescu, V. Radulescu, *Existence and multiplicity of solutions for quasilinear nonhomogeneous problems : an Orlicz–Sobolev space setting*, Journal of mathematical analysis and applications, (2007), vol. 330, no 1, 416-432.

[67] S.E.H. Miri, *On an anisotropic problem with singular nonlinearity having variable exponent*, Ricerche di Matematica 66.2 (2017), 415-424.

[68] S.E.H. Miri, *Problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singulier*, (2012). Thèse de doctorat.

[69] S.E.H. Miri, *Problèmes elliptiques et paraboliques avec termes singuliers*, Éditions universitaires européennes, 2015.

[70] S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies 12 (2012), 19-48.

[71] F. Mokhtari, *Anisotropic parabolic problems with measures data*, Differential Equations and Applications 2.1 (2010), 123-150.

[72] S. M. Nikolskii, *Imbedding theorems for functions with partial derivatives considered in various metrics*, Izd. Akad. Nauk SSSR 22 (1958), 321-336.

[73] F. Petitta, *Nonlinear parabolic equations with general measure data*, Tesi di Dottorato, Universitá La Sapienza di Roma, (A.A 2004-2005).

[74] A. Prignet, *Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel*, Thèse de Doctorat, UMPA-ENS Lyon, (1997).

[75] V. Radulescu, D. Repovs, *Partial Differential Equations with Variable Exponents : Variational Methods and Qualitative Analysis*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, 2015.

[76] J. Serrin, *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, (1964), vol. 18, no 3, 385-387.

[77] E. D. Silva, J. V. Goncalves, , K. O. Silva, *On Strongly Nonlinear Eigenvalue Problems in the Framework of Nonreflexive Orlicz-Sobolev Spaces*, arXiv preprint arXiv :1610.02662, (2016).

[78] L.N. Slobodeckii, *Generalized Sobolev spaces and their application to boundary problems for partial differential equations*, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap, (1958), vol. 197, 54-112.

[79] G. Stampacchia, , *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, (1965), 189-258.

[80] M. Struwe, *Variational methods*, Berlin etc. : Springer, (1990).

[81] R. Temam,*Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, (1968), vol. 96, 115-152.

[82] M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat, 18 (1969), 3-24.

[83] J. Weickert, *Anisotropic diffusion in image processing*, European Consortium for Mathematics in Industry, B. G. Teubner, Stuttgart, (1998).