Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : Nom & Prénom **Groupe :** Groupe.

Soit les propositions :

$P : \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} \quad y \geq x^2$

$Q : \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$

$R : \forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$

En justifiant votre réponse dire si les propositions P, Q et R sont vraies ou fausses, ensuite donner leur négation.

Solution :

$P : \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} \quad y \geq x^2$ est vraie

En effet $\exists x = 0 \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\quad y \geq x^2 = 0$.

$\overline{P} : \forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \quad y < x^2$

$Q : \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$ est fausse.

En effet supposons (par l'absurde) qu'un tel x existe, y étant quelconque prenons $y = x^2$ on obtient alors $x^2 > x^2$ ce qui est impossible

$\overline{Q} : \forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \quad y \leq x^2$

$R\ \forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \quad y > x^2$ vraie

En effet : $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y = (x^2+1) \in \mathbb{N} \quad y = x^2+1 > x^2$.

$\overline{R} : \exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N} \quad y \leq x^2$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : Nom & Prénom **Groupe :** Groupe

Soit les propositions :

$P : \forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

$Q : \forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

$R : \exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

En justifiant votre réponse dire si les propositions P, Q et R sont vraies ou fausses, ensuite donner leur négation.

Solution:

$P : \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est fausse

Il suffit de donner un contre exemple: $x=-1 \in \mathbb{R}$ $y=-3 \in \mathbb{R}$, $x+y=-4 \leq 0$

$\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0.$

$Q : \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est vraie

En effet $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y = -x+1$ (par exemple) $x+y = x-x+1 = 1 > 0.$

$\overline{Q} : \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0.$

$R : \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0$ est fausse

Il suffit de donner un contre exemple, Supposons qu'un tel x existe

et choisissons par exemple $y = -x-1$; $x+y = x-x-1 = -1 \leq 0.$

$\overline{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leq 0.$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : Nom Et Prénom

Groupe : Groupe

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2}n(n+1)$
2. Sachant que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ montrer que $\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2}n(n+1)$

Solution:

1. $\sum_{k=n}^{2n} k = 3/2\, n(n+1)$ par récurrence

$n=0$ $\quad \sum_{k=0}^{0} k = 0$, $\quad 3/2 \cdot 0 \cdot (0+1) = 0$ ainsi l'égalité est vérifiée pour $n=0$.

On suppose que $\sum_{k=n}^{2n} k = \frac{3}{2} n(n+1)$ H.R, il faut montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n+2} k = \frac{3}{2}(n+1)(n+2)$.

En effet: $\sum_{k=n+1}^{2n+2} k = (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n + (2n+1) + (2n+2)$

$= \underbrace{n + (n+1) + (n+2) + \cdots + 2n} + (2n+1) + (2n+2) - n$

$= \sum_{k=n}^{2n} k + (2n+1) + (2n+2) - n$ (d'après HR)

$= 3/2\, n(n+1) + 3n + 3 = 3/2\, n(n+1) + 2\, 3/2\,(n+1)$

$= 3/2\,(n+1)(n+2)$ cqfd.

2. 1ère méthode: $\sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{k=0}^{2n} k - \sum_{k=0}^{n-1} k = 1/2\, 2n(2n+1) - 1/2\,(n-1)n$

$= 1/2\, n(4n+2-n+1) = 1/2\, n(3n+3) = 3/2\, n(n+1)$ (cqfd)

2ème méthode: $\sum_{k=n}^{2n} k$ Posons $k' = k-n$ donc $k = k'+n$.
$k=n \Rightarrow k'=0$, $k=2n \Rightarrow k'=n$

$\sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{k'=0}^{n} (k'+n) = \sum_{k'=0}^{n} k' + \sum_{k'=0}^{n} n = 1/2\, n(n+1) + n \sum_{k'=0}^{n} 1 = 1/2\, n(n+1) + n(n+1)$

$\sum_{k=n}^{2n} k = 3/2\, n(n+1)$. cqfd.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : Nom Et Prénom **Groupe :** Groupe.

Montrer par récurrence que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$

En déduire (sans utiliser une démonstration par récurrence) que pour tout $n>0$ *on a* $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}$

Solution:

1. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$ par récurrence

pour $n=0$ $\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^0}=1$; $\frac{1-\frac{1}{2}}{1-1/2}=1$ ainsi l'égalité est vérifiée pour $n=0$.

On suppose que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2}$ (H.R), il faut montrer que: $\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+2}}}{1-1/2}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-1/2}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}}}{1-1/2}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+2}}}{1-1/2}\quad \text{cqfd.}$$

2. 1ère méthode: $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{2^k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=\frac{1-1/2^{2n+1}}{1-1/2}-\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-1/2}$

$$=\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n+1}}}{1-1/2}=\frac{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n+1}}}{1/2}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}.\quad \text{cqfd.}$$

2ème méthode: $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}$ Posons $k'=k-n$ donc $k=k'+n$.
$k=n\Rightarrow k'=0$, $k=2n\Rightarrow k'=n$.

$$\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{2^k}=\sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{2^{k'+n}}=\sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{2^{k'}}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k'=0}^{n}\frac{1}{2^{k'}}=\frac{1}{2^n}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-1/2}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}\quad \text{cqfd.}$$