Test 1

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + Arctg(\frac{x}{y})$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a_1, a_2 et a_3 pour que f soit harmonique.

Solution

On rappelle qu'une fonction est harmonique ssi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2a_1x + a_2y + \frac{1}{y}\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} = 2a_1x + a_2y + \frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2a_1 + \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a_2x + 2a_3y + \left(-\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = a_2x + 2a_3y + \frac{-x}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2a_3 + \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

Ainsi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_1 + 2a_3$ ***, et donc pour que f soit harmonique il est nécessaire et suffisant d'avoir***

$$a_1 = -a_3 \text{ et } a_2 \text{réel quelconque}$$

<u>Remarque :</u>

C'est le même calcul et donc la même conclusion pour

$$f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + Arctg(\frac{y}{x})$$

Test 2

Soit l'application f ***définie de*** $\mathbb{R}^2$ ***vers*** $\mathbb{R}$ ***par :*** $f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + ln(x^2 + y^2)$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a_1, a_2 ***et*** a_3 ***pour que*** f ***soit harmonique.***

Solution

On rappelle qu'une fonction est harmonique ssi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2a_1x + a_2y + \frac{2x}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2a_1 + \frac{-2x^2 + 2y^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a_2x + 2a_3y + \frac{2y}{(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2a_3 + \frac{2x^2 - 2y^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

Ainsi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_1 + 2a_3$ ***, et donc pour que*** f ***soit harmonique il est nécessaire et suffisant d'avoir***

$$a_1 = -a_3 \text{ et } a_2 \text{réel quelconque}$$

Remarque :

C'est le même calcul et donc la même conclusion pour

$$f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + ln\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Il suffit de remarquer que $ln\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2)$

Test 3

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3x-1}{5x-4}$

Trouver et démontrer la formule de $f^{(n)}(x)$, la dérivée nième de f.

Solution

Commençons par observer que f est continue et dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$.

$$f'(x) = \frac{3(5x-4) - 5(3x-1)}{(5x-4)^2} = \frac{-7}{(5x-4)^2} = -7(5x-4)^{-2}$$

$$f''(x) = -7 \times 5 \times (-2)(5x-4)^{-3}$$

$$f'''(x) = -7 \times 5^2 \times (-2)(-3)(5x-4)^{-4}$$

On déduit la formule

$$f^{(n)}(x) = -7 \times 5^{n-1} \times (-1)^{n-1} \times n! \times (5x-4)^{-(n+1)}$$

Formule qu'il reste à montrer par récurrence, en effet

Pour $= 1$, on a bien $f'(x) = -7(5x-4)^{-2} = -7 \times 5^0 \times (-1)^0 \times 1! \times (5x-4)^{-(1+1)}$

On suppose que $f^{(n)}(x) = -7 \times 5^{n-1} \times (-1)^{n-1} \times n! \times (5x-4)^{-(n+1)}$ (hypothèse de récurrence)

Il faut montrer que $f^{(n+1)}(x) = -7 \times 5^n \times (-1)^n \times (n+1)! \times (5x-4)^{-(n+2)}$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[-7 \times 5^{n-1} \times (-1)^{n-1} \times n! \times (5x-4)^{-(n+1)}\right]'$$

$$f^{(n+1)}(x) = -7 \times 5^{n-1} \times (-1)^{n-1} \times n! \times [-(n+1)]5 \times (5x-4)^{-(n+1)-1}$$

Et donc $f^{(n+1)}(x) = -7 \times 5^n \times (-1)^n \times (n+1)! \times (5x-4)^{-(n+2)}$ cqfd

En conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f^{(n)}(x) = -7 \times 5^{n-1} \times (-1)^{n-1} \times n! \times (5x-4)^{-(n+1)}$$