Test n° 01

En utilisant un développement de Taylor-MacLaurin, calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin ax}-1}{e^{\sin bx}-1}$$

Solution:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(\theta x) \qquad 0<\theta<1.$$

$f(x)=e^{\sin ax} \Longrightarrow f(0)=1$;

$f'(x)=a\cos ax\, e^{\sin ax} \Longrightarrow f'(0)=a$;

$f''(x)=(-a^2\sin ax+a^2\cos^2 ax)\,e^{\sin ax} \Longrightarrow f''(\theta x)=(-a^2\sin(a\theta x)+a^2\cos^2(a\theta x))\,e^{\sin(a\theta x)}$

Ainsi: $e^{\sin(ax)}=1+ax+\frac{x^2}{2!}(-a^2\sin(a\theta x)-a^2\cos^2(a\theta x))\,e^{\sin(a\theta x)}$;

de même $e^{\sin(bx)}=1+bx+\frac{x^2}{2!}(-b^2\sin(b\theta x)-b^2\cos^2(b\theta x))\,e^{\sin(b\theta x)}$.

Il en découle que: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(ax)}-1}{e^{\sin(bx)}-1}=\frac{a}{b}$

Remarque: quand $x\to 0$; $\sin x \simeq x$; donc $x\to 0$, $\sin ax\simeq ax$.

ainsi $e^{\sin ax}\simeq e^{ax}$ $(x\to 0)$

D'un autre côté $e^X=1+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots \Rightarrow e^{ax}=1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\cdots$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(ax)}-1}{e^{\sin(bx)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\cdots)}{(1+bx+\frac{(bx)^2}{2!}+\cdots)}=\frac{a}{b}.$

Test n° 02

En utilisant un développement de Taylor-MacLaurin calculer la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\mathrm{tg}\, ax)}{\sin(\mathrm{tg}\, bx)}$

Solution :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x) \quad 0 < \theta < 1.$$

$$f(x) = \sin(\mathrm{tg}\, ax) \Longrightarrow f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{a}{\cos^2 ax} \cos(\mathrm{tg}\, ax) \Longrightarrow f'(0) = a.$$

$$f''(x) = \frac{-2a^2 \sin ax \cdot \cos ax}{\cos^4 ax} \cos(\mathrm{tg}\, ax) - \frac{a}{\cos^2 ax} \cdot \frac{a}{\cos^2 ax} \sin(\mathrm{tg}\, ax)$$

$$f''(\theta x) = \frac{-2a^2 \sin a\theta x}{\cos^3 a\theta x} \cos(\mathrm{tg}\, a\theta x) - \frac{a^2}{\cos^4 a\theta x} \sin(\mathrm{tg}\, a\theta x).$$

ainsi $\sin(\mathrm{tg}\, ax) = ax + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x)$

$\sin(\mathrm{tg}\, bx) = bx + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x)$ Comme $f''(\theta x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

d'où $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\mathrm{tg}\, ax)}{\sin(\mathrm{tg}\, bx)} = \frac{a}{b}$

Remarque quand $x \to 0$; $\mathrm{tg}\, x \simeq x$

et comme $ax \to 0$, $\mathrm{tg}\, ax \simeq ax$

D'un autre côté quand $X \to 0$; $\sin X \simeq X$.

ainsi $\sin(\mathrm{tg}\, ax) \simeq \sin(ax) \simeq ax$ qd $x \to 0$

de même $\sin(\mathrm{tg}\, bx) \simeq \sin(bx) \simeq bx$

d'où $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\mathrm{tg}\, ax)}{\sin(\mathrm{tg}\, bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$.

Test n° 03

En utilisant un développement de Taylor-Machaurin, calculer la limite :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$$

Solution :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(\theta x) \qquad 0 < \theta < 1.$$

$$f(x) = \ln(\cos ax) \Longrightarrow f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{-a \sin ax}{\cos ax} = -a\, tg(ax) \Longrightarrow f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = -a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(ax)} = \frac{-a^2}{\cos^2(ax)} \Longrightarrow f''(0) = -a^2.$$

$$f'''(x) = -a^3 \frac{2 \sin(ax) \cos(ax)}{\cos^4(ax)} = -2a^3 \frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)} \Longrightarrow f'''(\theta x) = -2a^3 \frac{\sin(a\theta x)}{\cos^3(a\theta x)}$$

Ainsi : $\ln(\cos(ax)) = \frac{x^2}{2!}(-a^2) + \frac{x^3}{3!}(-2a^3) \frac{\sin(a\theta x)}{\cos^3(a\theta x)} \qquad 0 < \theta < 1.$

de même $\ln(\cos(bx)) = \frac{x^2}{2!}(-b^2) + \frac{x^3}{3!}(-2b^3) \frac{\sin(b\theta x)}{\cos^3(b\theta x)} \qquad 0 < \theta < 1.$

Il en découle que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{-a^2}{-b^2} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$

Remarque : Quand $x \to 0$; $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!}$; et donc $\cos(ax) \simeq 1 - \frac{(ax)^2}{2!}$

Quand $X \to 0$; $\ln(1+X) \simeq X$.

donc $\ln(\cos(ax)) \simeq \ln\left(1 - a^2 \frac{x^2}{2!}\right) \simeq -a^2 \frac{x^2}{2!}$ (quand $x \to 0$)

Par suite : $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \lim_{x \to 0} \frac{-a^2 x^2/2!}{-b^2 x^2/2!} = \frac{-a^2}{-b^2} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$