Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie industriel

Année 2021-2022
L1
Algèbre

Devoir à rendre le 02 Janvier 2022

Exercice 1. *01 point*
Soient les propositions p, q et r suivantes,

$$\begin{aligned} p &: \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0 \\ q &: \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y>0 \\ r &: \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0 \end{aligned}$$

1. ***En justifiant votre réponse, dire si p, q et r sont vraies ou fausses.***
2. ***Donner les négations de p, q et r.***

Exercice 2. *01 point*
Soient les propositions p et q suivantes

$$\begin{aligned} p &: \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N},\ m>n^2 \\ q &: \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ m>n^2 \end{aligned}$$

1. ***En justifiant votre réponse, dire si p et q sont vraies ou fausses.***
2. ***Donner les négations de p et de q.***

Exercice 3. *01 point*
Montrer que:

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ***et*** $\sqrt{6}$ ***sont irrationnels.***
2. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ ***est irrationnel.***
3. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$ ***est irrationnel.***

Exercice 4. *01 point*
En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que l'équation:

$$9x^5-12x^4+6x-5=0$$

n'admet pas de solution entière (dans $\mathbb{Z}$***).***

Exercice 5. *01 point*

Soit $l \in \mathbb{R}$, en utilisant la contraposée, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l| \leq \varepsilon \Rightarrow l = 0.$$

Exercice 6. *01 point*

Soient x, y deux réels donnés. En utilisant la contraposée montrer que:

$$((x+y) \text{ est irrationnel}) \Longrightarrow (x \text{ est irrationnel ou } y \text{ est irrationnel}).$$

Que pouvez vous dire de l'implication

$$(x \text{ est irrationnel ou } y \text{ est irrationnel}) \Longrightarrow ((x+y) \text{ est irrationnel})$$

Exercice 7. *02 points*

Trouver tous les réels x pour lesquels l'implication suivante est vraie

$$\forall y \in [0,1], x \geq y \Rightarrow x \geq 2y.$$

Exercice 8. *02 points*

Soit f une fonction de la variable réelle, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On dira que f est injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

1. ***En utilisant la négation, donner la définition d'une fonction qui n'est pas injective.***
2. ***Soit***

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

   définie par

   $$f(x) = |x+1| - 2$$

   Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 9. *01 point*

Montrer par récurrence ce qui suit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{(n+1)}{3(n+4)}$$

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^n}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)\right]$$

Exercice 10. *02 points*

Trouver la valeur de la somme

$$\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20}$$

ensuite démontrer le résultat obtenu par récurrence.

Exercice 11. *02 points*

Soit E un ensemble donné, A, B et C trois sous-ensembles de E

1. ***Trouver $A\triangle A$, $A\triangle\phi$, $A\triangle E$, $A\triangle \complement_E A$***
2. ***Montrer que***
$$(A\triangle B)\cap C=(A\cap C)\triangle(B\cap C)$$
3. ***Montrer que***
$$(A\triangle C=B\triangle C)\Leftrightarrow(A=B)$$

Exercice 12. *01 point*

Soient les deux ensembles $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ 3x-2y=-1\}$ et $B=\left\{\left(\frac{2}{3}t,t+\frac{1}{2}\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}$, montrer que $A=B$.

Exercice 13. *01 point*

Soient A et B deux ensembles donnés. Montrer les équivalences suivantes

$$A\cup B=B\iff A\subset B$$
$$A\cap B=B\iff B\subset A$$

Exercice 14. *01 point*

Soit E un ensemble non-vide qui contient n éléments (on écrit dans ce cas $Card(E)=n$, Card désigne le cardinal, qui signifie le nombre d'éléments d'un ensemble), et soit $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer alors que $\mathscr{P}(E)$ contient 2^n éléments. En d'autres termes il est demandé de démontrer l'implication

$$Card(E)=n\Rightarrow Card\mathscr{P}(E)=2^n.$$

Exercice 15. *02 points*

Soit
$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

En utilisant une démonstration par l'absurde, montrer que E ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de deux sous ensembles de $\mathbb{R}$.

Corrigé du devoir

Exercice 1 :

I. 1. $p : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0$

p est fausse en effet supposons par l'absurde que p soit vraie alors dans ce cas, il va exister un réel x tel que pour tout y on aurait $x+y>0$

prenons alors par exemple $y=-x-10$ ($y=-x-5$ ou $y=-x-100$)

$x+y = x+(-x-10) = -10<0$ Contraire à l'hypothèse

2. $q : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y>0$.

q est vraie : en effet pour s'en convaincre soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque il va toujours exister un $y \in \mathbb{R}$ ($y=-x+10$ ou $y=-x+30$ ....) tel que $x+y = x+(-x+10) = 10>0$.

3. $r : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0$.

r est fausse : en effet il suffit de prendre $x<0$ et $y<0$ par exemple $x=-5$, $y=-\sqrt{2}$ alors $x+y<0$.

II.

$\overline{p} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$.

$\overline{q} \iff \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

$\overline{r} \iff \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$

Exercice 2 :

I. 1. p : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $m > n^2$

p est vraie : en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit (par exemple) de prendre $m = n^2 + 30$ et on aura $m > n^2$.

2. q : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > n^2$.

q est fausse : en effet si un tel $n \in \mathbb{N}$ existe alors en prenant $m = 0$ on obtiendrait ainsi la contradiction $0 > n^2$.

II. $\overline{p} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n^2$

$\overline{q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \leq n^2$

Exercice 3 :

1. $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel

Donc $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ on supposera de plus que la fraction

$\frac{p}{q}$ est irréductible.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ est pair.}$$

Montrons par contraposée que p^2 est pair $\Rightarrow$ p est pair

en effet p est impair $\Rightarrow p = (2k+1) \Rightarrow p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$\Rightarrow p^2 = 2(2k^2+2k) + 1$$
$$\Rightarrow p^2 \text{ est impair}$$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow$ p est pair $\Rightarrow p = 2k$

or $p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow$ q est pair

On en arrive à p est pair et q est pair ce qui contredit l'irréductibilité

de la fraction $\frac{p}{q}$. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

$\sqrt{3}$ est irrationnel, faisons un raisonnement similaire au précédent,

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel

Donc $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$, on supposera de plus que la

fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2 \Rightarrow p^2 \text{ est un multiple de } 3.$$

[Montrons par contraposée que p^2 est un multiple de 3 $\Rightarrow$ p est un multiple de 3

en effet : p n'est pas un multiple de 3 $\Rightarrow p = 3k+1$ ou $p = 3k+2$

$\Rightarrow p^2 = (3k+1)^2$ ou $p^2 = (3k+2)^2$

$\Rightarrow p^2 = 9k^2+6k+1$ ou $p^2 = 9k^2+12k+4$

$\Rightarrow p^2 = 3(3k^2+2k)+1$ ou $p^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$.

$\Rightarrow p^2 = 3k'+1$ ou $p^2 = 3k''+1$

$\Rightarrow p^2$ n'est pas un multiple de 3].

$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2$ est multiple de 3 $\Rightarrow$ p est multiple de 3 $\Rightarrow p = 3k$

Or $p^2 = 3q^2 \Rightarrow (3k)^2 = 3q^2 \Rightarrow 9k^2 = 3q^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow q^2$ multiple de 3

$\Rightarrow$ q multiple de 3 $\Rightarrow q = 3k'$

ainsi on aboutit à une contradiction avec $\frac{p}{q}$ forme irréductible. Donc

$\sqrt{3}$ est irrationnel.

$\sqrt{6}$ est irrationnel On s'inspire des démonstrations précédents.

<u>Attention</u> [Ne faites pas l'erreur de dire $\sqrt{6}$ est le produit de deux irrationnels alors c'est un irrationnel. Pour s'en convaincre il suffit de voir que $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ 2 est bien rationnel bien que pouvant être écrit sous forme de produit de deux irrationnels.]

2. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ est irrationnel

[Attention: Ne faites pas l'erreur de dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\sqrt{3}$ est irrationnel alors $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ est irrationnel, ceci est faux pour s'en convaincre voir le corrigé de l'exercice 6]

Supposons par l'absurde que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ est rationnel

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} - 5 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q^2}-5\right)$$

$\Rightarrow \sqrt{6}$ est rationnel ce qui est absurde car on a démontré que $\sqrt{6}$ est irrationnel.

3. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ est irrationnel

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ est rationnel.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \left(\frac{p}{q}-\sqrt{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2+3+2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} + 6 - \frac{2p}{q}\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{q}\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} + 1.$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \frac{\frac{p^2}{q^2}+1}{\frac{2p}{q}+2}$$

$\Rightarrow \sqrt{6}$ est rationnel ce qui est absurde. Car on a démontré que $\sqrt{6}$ est irrationnel.

Exercice 4 :

Supposons par l'absurde que que l'équation

$$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$$

admet une solution $n \in \mathbb{Z}$, Donc :

$$9n^5 - 12n^4 + 6n - 5 = 0 \iff 9n^5 - 12n^4 + 6n = 5$$

$$\iff n(9n^4 - 12n^3 + 6) = 5.$$

La dernière égalité implique que n divise 5, Donc nécessairement

$n = 5$ ou $n = -5$ ou $n = 1$ ou $n = -1$.

Or ni 5, ni (-5) ni 1 ni (-1) ne vérifie l'équation

$$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$$

Par exemple $9 \times 1^5 - 12 \times 1^4 + 6 \times 1 - 5 = -2 \neq 0.$

$9(-1)^5 - 12(-1)^4 + 6 \times (-1) - 5 = -32 \neq 0.$

$9(5)^5 - 12 \times (5)^4 + 6 \times 5 - 5 = 20650 \neq 0.$

$9(-5)^5 - 12(-5)^4 + 6(-5) - 5 = -35660 \neq 0.$

Exercice 5 :

Soit $l \in \mathbb{R}$, par la contraposée montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |l| \leq \varepsilon \Rightarrow l = 0.$$

Donc nous allons montrer que :

$$l \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, |l| > \varepsilon.$$

Supposons que $l \neq 0$ et prenons (par exemple) $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ (ou $\frac{|l|}{3}$ ou $\frac{|l|}{10}$ ...) alors $\varepsilon > 0$ et on a bien.

$$|l| > \frac{|l|}{2} = \varepsilon.$$

Remarque : Cet exercice permet (entre autres) de montrer que la limite lorsqu'elle existe est unique.

(d'une suite par exemple).

Exercice 6 :

1. $((x+y)$ est irrationnel$) \Longrightarrow (x$ est irrationnel ou y est irrationnel$)$

La contraposée est donnée par :

$(x$ est rationnel et y est rationnel$) \Longrightarrow ((x+y)$ est rationnel$)$

en effet si x est rationnel : $x = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*)$

si y est rationnel $y = \frac{p'}{q'}$ $(p' \in \mathbb{Z}, q' \in \mathbb{Z}^*)$

$x+y = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$ qui est bien rationnel.

2. $(x$ est irrationnel ou y est irrationnel$) \Longrightarrow ((x+y)$ est irrationnel$)$

est une implication qui est fausse, pour s'en convaincre il suffit de prendre le contre exemple

$x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$.

On a bien x ou y irrationnels (puisqu'ils sont tous deux irrationnels)

mais $x+y = 0$ est rationnel

Exercice 7

Trouver les réels x qui réalisent l'implication suivante:

$$\forall y \in [0,1], \quad x \geq y \Rightarrow x \geq 2y.$$

Séparons l'analyse en plusieurs cas:

1er cas : $x \geq 2$.

Comme $y \in [0,1]$, on a bien $x \geq y$ et $x \geq 2y$.

Donc l'implication est vraie (le vrai implique le vrai).

2ème cas : $x < 0$.

Comme $y \in [0,1]$, $x \geq y$ est fausse et $x \geq 2y$ est fausse.

Donc l'implication est vraie

3ème cas $0 < x < 2$.

Dans ce cas $0 < \frac{x}{2} < 1$ en choisissant y tel que

$$x/2 < y < \min(1,x) \quad \text{on a:}$$

$x \geq y$ est vraie mais $x \geq 2y$ est fausse

Donc l'implication est fausse (le vrai n'implique pas le faux).

4ème cas si $x = 0$.

on a bien $\forall y \in [0,1]$, $0 \geq y \Rightarrow 0 \geq 2y$.

Donc l'implication est vraie.

L'implication donnée est donc vraie pour $x \geq 2$ et $x \leq 0$.

Exercice 8 :

1/ f est injective ssi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

f n'est pas injective ssi $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$.

2/

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |x+1| - 2 = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq -1. \\ -x-3 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Pour montrer que f n'est pas injective il suffit de trouver

$x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

Soit $x_1 \geq -1$ et $x_2 \leq -1$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 - 1 = -x_2 - 3$$
$$\Longrightarrow x_1 = -x_2 - 2.$$

Prenons par exemple : $x_2 = -3 \leq -1$.

$x_1 = -x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = -(-3) - 2 = 1. \Rightarrow x_1 = 1.$

$f(x_1) = f(1) = |1+1| - 2 = 0.$

$f(x_2) = f(-3) = |-3+1| - 2 = 2 - 2 = 0$

On a bien $f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$.

Donc f n'est pas injective.

Exercice 9 : Par récurrence montrons que :

I/ $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$$

- Pour $n=0$ $\quad \frac{1}{0^2+7\times 0+12} = \frac{1}{12}$ et $\frac{0+1}{3(0+4)} = \frac{1}{12}$

On a bien l'égalité vérifiée pour $n=0$.

- On suppose que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$ (Hypothèse de récurrence)

- Il faut montrer que : $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+2}{3(n+5)}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+7k+12} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} + \frac{1}{(n+1)^2+7(n+1)+12}$$

Hypothèse de récurrence

$$= \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{n^2+9n+20}$$

$$= \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+5)+3}{3(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{n^2+6n+8}{3(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{(n+2)\cancel{(n+4)}}{3\cancel{(n+4)}(n+5)}$$

$$= \frac{n+2}{3(n+5)}$$

Cqfd.

II/ $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right]$.

• Pour $n=0$ $\quad \frac{1}{4^0} = 1.$ et $\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^0}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{4}{3}\times\frac{3}{4} = 1.$

l'égalité est bien vérifiée.

• On suppose que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right]$. (Hypothèse de Récurrence)

• Il faut montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^{n+1}}\left(1-\frac{1}{4^{n+2}}\right)\right]$

$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{2n+1}} + \frac{1}{4^{2n+2}}.$$

$$= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{2n+1}} + \frac{1}{4^{2n+2}} - \frac{1}{4^n}.$$

Hypothèse de récurrence

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right] + \frac{1}{4^n}\left[\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} - 1\right]$$

$$= 4/3\left[\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\right] + 4/3\left[\frac{1}{4^n}\left(3/4\left[\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} - 1\right]\right)\right]$$

$$= 4/3\left[\frac{1}{4^n}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} - 1\right)\right)\right]$$

$$= 4/3\left[\frac{1}{4^{n+1}}\left(4 - \frac{1}{4^n} + \frac{3}{4^{n+1}} + \frac{3}{4^{n+2}} - 3\right)\right].$$

$$= 4/3\left[\frac{1}{4^{n+1}}\left(1 + \frac{-16+12+3}{4^{n+2}}\right)\right].$$

$$= 4/3\left[\frac{1}{4^{n+1}}\left(1 - \frac{1}{4^{n+2}}\right)\right]$$

Cqfd

Exercice 10

$$\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20}.$$

Il suffit de remarquer que: $\dfrac{1}{k^2+9k+20} = \dfrac{1}{k+4} - \dfrac{1}{k+5}.$

$$\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20} = \sum_{k=n}^{3n}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{3n+5}\right)$$

$$= \frac{1}{n+4}-\frac{1}{3n+5} = \frac{3n+5-(n+4)}{(3n+5)(n+4)}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20} = \frac{2n+1}{(3n+5)(n+4)}$

Montrons ce résultat par récurrence.

Pour $n=0$ $\quad \dfrac{1}{0^2+9\times0+20} = \dfrac{1}{20}$ et $\dfrac{2\times0+1}{(3\times0+5)(0+4)} = \dfrac{1}{20}.$

égalité vérifiée.

On suppose que $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20} = \frac{2n+1}{(3n+5)(n+4)}$ hypothèse de Récurrence

Il faut montrer que: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{3n+3} \frac{1}{k^2+9k+20} = \frac{2n+3}{(3n+8)(n+5)}$

$$\sum_{k=n+1}^{3n+3} \frac{1}{k^2+9k+20} = \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^2+9k+20} + \frac{1}{(3n+1)^2+9(3n+1)+20} + \frac{1}{(3n+2)^2+9(3n+2)+20}$$

$$+ \frac{1}{(3n+3)^2+9(3n+3)+20} - \frac{1}{n^2+9n+20}$$

$$= \frac{2n+1}{(3n+5)(n+4)} + \frac{1}{(3n+5)(3n+6)} + \frac{1}{(3n+6)(3n+7)} + \frac{1}{(3n+7)(3n+8)}$$

$$- \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{2n+3}{3n^2+23n+40}$$

$$= \frac{2n+3}{(3n+8)(n+5)}$$

Exercice 11

Soient $A \subset E$, $B \subset E$, Rappelons que

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (Différence symetrique)

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Les élements de $A \Delta B$ appartiennent à A ou à B sans appartenir à $A \cap B$.

1/

$$A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset.$$

$$A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A.$$

$$(A \Delta E) = (A \cup E) - (A \cap E) = E - A = \complement_E^A.$$

$$(A \Delta \complement_E^A) = (A \cup \complement_E^A) - (A \cap \complement_E^A) = E - \emptyset = E$$

2/ $$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

Montrons la double inclusion

"$\subset$" Soit $x \in (A \Delta B) \cap C$.

Donc $x \in (A \Delta B)$ et $x \in C$.

$$x \in A \Delta B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \text{ et } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ et } x \in B. \end{cases}$$

Dans le cas où $x \in A$ et $x \notin B$ et puisque $x \in C$. on aura

$x \in (A \cap C)$ et $x \notin (B \cap C)$ Donc nécessairement

$$x \in [(A \cap C) \Delta (B \cap C)]$$

Dans le cas où $x \notin A$ et $x \in B$ et puisque $x \in C$ on aura

$x \notin (A \cap C)$ et $x \in (B \cap C)$ Donc nécessairement

$$x \in [(A \cap C) \Delta (B \cap C)]$$

et la première inclusion est démontrée.

On passe à la deuxième inclusion "$\supset$"

Soit $x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C) \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cap C) \text{ et } x \notin (B \cap C) \\ \underline{\underline{\text{ou}}} \\ x \notin (A \cap C) \text{ et } x \in (B \cap C). \end{cases}$

Dans le cas où $x \in (A \cap C)$ et $x \notin (B \cap C)$

on a nécessairement $x \in A$ et $x \in C$ et $x \notin B$.

Donc $x \in A$ et $x \notin B$ et $x \in C$

soit $x \in (A \Delta B) \cap C$.

Dans le cas où $x \notin (A \cap C)$ et $x \in (B \cap C)$

on a nécessairement $x \in B$ et $x \in C$ et $x \notin A$.

Donc $x \in B$ et $x \notin A$ et $x \in C$.

soit $x \in (A \Delta B) \cap C$.

et la deuxième inclusion est aussi démontrée donc:

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

3. $(A \Delta C) = (B \Delta C) \Longleftrightarrow (A = B)$.

"$\Longleftarrow$" Clairement si $A = B$ alors $A \Delta C = B \Delta C$

"$\Longrightarrow$" Hypothèse $(A \Delta C) = (B \Delta C)$ et il faut montrer que $A = B$.

"$\subset$"

<u>Soit</u> <u>$x \in A$</u> de deux choses l'une soit que $x \notin C$ ou $x \in C$.

<u>1er cas</u>: $x \notin C$ alors $x \in A \Delta C = B \Delta C$.

donc nécessairement $x \in B$ (puisque $x \notin C$).

$2^{\text{ème}}$ cas $x \in C$ alors $x \in A \cap C$

et donc $x \notin A \Delta C$ et par conséquent $x \notin B \Delta C$.

mais comme $x \in C$ nécessairement $x \in B \cap C$ donc $x \in B$

Donc si $x \in A$ alors nécessairement $x \in B$ (Dans les deux cas $x \in C$ ou $x \notin C$). ainsi $A \subset B$.

On démontre que $B \subset A$ par le même procédé

En conclusion $A = B$.

Exercice 12

$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ 3x - 2y = -1 \}$

$B = \{ (\frac{2}{3}t, t + \frac{1}{2}) , \ t \in \mathbb{R} \}$.

Pour montrer que $A = B$, nous allons montrer la double inclusion:

" $\subset$ " Soit $X \in A$.

$X \in A \Rightarrow X = (x,y)$ telque: $3x - 2y = -1$

$3x - 2y = -1 \Rightarrow 2y = 3x + 1$.

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

ainsi $X \in A$, $X = (x,y) \Rightarrow X = (x, \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})$

En posant $t = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{3}t$

$\Rightarrow X = (\frac{2}{3}t, t + \frac{1}{2}) \in B$.

" $\supset$ "

Soit $X \in B$ =

$X \in B \Rightarrow X = (\underbrace{\tfrac{2}{3}t}_{x}, \underbrace{t + \tfrac{1}{2}}_{y})$, $t \in \mathbb{R}$

En posant $x = \frac{2}{3}t$ et $y = t + \frac{1}{2}$

$3x - 2y = 3(\frac{2}{3}t) - 2(t + \frac{1}{2}) = 2t - 2t - 1 = 1$

Donc $X = (x,y)$ avec $3x - 2y = -1$

$X \in \underline{\underline{A}}$.

On a la double inclusion et par suite $A = B$.

Exercice 13 :

$$A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

" $\Longrightarrow$ " Hyp $A \cup B = B$ il faut montrer que $A \subset B$.

$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$

$\Longrightarrow x \in B$ (Car dans cet exercice l'hypothèse $A \cup B = B$)

Donc $A \subset B$.

" $\Longleftarrow$ " Hyp : $A \subset B$ il faut montrer que $A \cup B = B$.

$B \subset A \cup B$ toujours vraie, il suffit donc de montrer que $A \cup B \subset B$.

$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

$\Longrightarrow x \in B$ ou $x \in B$ (Hyp $A \subset B$)

$\Longrightarrow x \in B$

Donc $A \cup B \subset B$ et par suite $A \cup B = B$.

$$A \cap B = B \Longleftrightarrow B \subset A.$$

" $\Longrightarrow$ " Hyp $A \cap B = B$ il faut montrer que $B \subset A$.

$x \in B \Longrightarrow x \in A \cap B$ (Car par hypothèse $A \cap B = B$)

$\Longrightarrow x \in A$ et $x \in B$

$\Longrightarrow x \in A$

Donc $B \subset A$

" $\Longleftarrow$ " Hyp $B \subset A$ il faut montrer que $A \cap B = B$

$A \cap B \subset B$ toujours vraie, il suffit donc de montrer que $B \subset A \cap B$

$x \in B \Longrightarrow x \in A$ ($B \subset A$ par hypothèse).

$\Longrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

$\Longrightarrow x \in A \cap B$ Donc $B \subset A \cap B$

et par suite $A \cap B = B$.

Exercice 14 :

$$\text{Card}(E) = n \Rightarrow \text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n.$$

Nous allons montrer ce résultat par récurrence.

- $\underline{n = 1}$ (on aurait pu et même dû commencer par $n=0$ mais en commençant par $n=1$ c'est plus facile à comprendre pour l'étudiant).

$E = \{x_1\}$ $\qquad\qquad \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x_1\}\}.$

on a bien $\text{Card}(E) = 1$ et $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^1 = 2.$

c'est donc bien vérifié pour $n = 1$

- On suppose que si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$\text{Card}\,E = n.$

alors $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^n$ $\qquad$ Hypothèse de récurrence.

- Il faut montrer que si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$
$(\text{Card}\,E = n+1)$

alors nécessairement $\text{Card}\,\mathcal{P}(E) = 2^{n+1}$.

il s'agit de faire un dénombrement des éléments de

$\mathcal{P}(E)$ en isolant le dernier élément x_{n+1}

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{ \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{x_{n+1}\},$$
$$\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \dots, \{x_1, x_n\}, \{x_1, x_{n+1}\},$$
$$\{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\} \dots, \{x_2, x_n\}, \{x_2, x_{n+1}\}$$
$$\vdots$$
$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\} \Big\}.$$

$$= \mathcal{P}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \cup \big\{ \{x_{n+1}\} \cup A \,;\, A \in \mathcal{P}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \big\}.$$

On retrouve tous les ensemble de $\mathcal{P}(E)$ lorsque

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

et cet effectif est doublé puisque à chaque ensemble on ajoutera x_{n+1}. (celui qui correspond à x_{n+1}).

Donc $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Remarque: Il existe plusieurs autres façons de démontrer ce résultat.

Exercice 15:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Supposons par l'absurde que E peut s'écrire sous la forme d'un produit cartésien de deux sous ensembles de $\mathbb{R}$

$$E = A \times B.$$

Comme $(1,0) \in E$ $\quad (1^2+0^2=1 \leq 1)$

alors nécessairement $1 \in A$ et $0 \in B$.

Comme $(0,1) \in E$ $\quad (0^2+1^2 = 1 \leq 1)$.

alors nécessairement $0 \in A$ et $1 \in B$

Donc $1 \in A$ et $1 \in B$ et par suite

$$(1,1) \in A \times B = E$$

Or : $1^2+1^2 = 2 > 1$ Donc $(1,1) \notin E$

Contradiction