Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2013-2014
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : ×××××   **Groupe :** ××××

Soit l'application:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x+4 & si \;\; x \geq 1 \\ 4x & si \;\; x < 1 \end{cases}$$

f est-elle surjective ?

Il faut commencer par remarquer que: $\begin{cases} \text{si } x \geqslant 1 \Rightarrow f(x) = 3x+4 \geqslant 7 \\ \text{si } x < 1 \Rightarrow f(x) = 4x < 4. \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $\;f(x) \in]-\infty, 4[\cup [7, +\infty[$.

Prenons par exemple $y = 5$ et résolvons $y = f(x)$

1er cas : si $x \geqslant 1$.

$y = 5 = f(x) \Rightarrow 5 = 3x+4 \Rightarrow x = \frac{1}{3} < 1$ contradiction avec l'hypothèse

2ème cas si $x < 1$

$y = 5 = f(x) \Rightarrow 5 = 4x \Rightarrow x = \frac{5}{4} > 1$ contradiction avec l'hypothèse

Donc $y = 5$ ne possède pas d'antécédent par f

($5 = f(x)$ ne possède pas de solution)

Donc f n'est pas surjective!

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2013-2014
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : × × × × × **Groupe :** × × × ×

Soit l'application:

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x+1 & si\ \ x \geq 1 \\ 4x & si\ \ x < 1 \end{cases}$$

f est-elle injective ?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

<u>1er cas</u> : $x_1 \geqslant 1$ et $x_2 \geqslant 2$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

<u>2ème cas</u> : $x_1 < 1$ et $x_2 < 1$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

<u>3ème cas</u> : $x_1 \geqslant 1$ et $x_2 < 1$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 4x_2 \Rightarrow x_2 = \dfrac{3x_1+1}{4}$

ce qui est impossible car : $x_1 \geqslant 1 \Rightarrow 3x_1 \geqslant 3 \Rightarrow 3x_1 + 1 \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{3x_1+1}{4} \geqslant 1$.

Comme $x_2 < 1$ $x_2 \neq \dfrac{3x_1+1}{4}$.

<u>4ème cas</u> : $x_1 < 1$ et $x_2 \geqslant 1$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_2 + 1 = 4x_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{3x_2+1}{4}$

ce qui est impossible car $x_2 \geqslant 1 \Rightarrow 3x_2 \geqslant 3 \Rightarrow 3x_2 + 1 \geqslant 4 \Rightarrow \dfrac{3x_2+1}{4} \geqslant 1$.

Comme $x_1 < 1$, $x_1 \neq \dfrac{3x_2+1}{4}$

En conclusion $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ donc f est injective.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2013-2014
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : × × × × ×   **Groupe :** × × ×

Soit l'application:

$$f: \ ]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = |6x-7|$$

f est-elle injective ?

$$f(x) = \begin{cases} 6x-7 & \text{si } x \geq \frac{7}{6} \\ 7-6x & \text{si } x \leq 7/6 \end{cases}$$

Soient $x_1, x_2 \in]1,2[$; considérons le cas $x_1 \geq 7/6$ et $x_2 \leq 7/6$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 6x_1 - 7 = 7 - 6x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{14-6x_1}{6}$. (on soupçonne la non injectivité de f !)

Prenons par exemple $x_1 = \frac{75}{60} = \frac{7,5}{6} \in]1,2[$ et $x_1 = \frac{7,5}{6} \geq \frac{7}{6}$

$f(x_1) = |6x_1 - 7| = |6 \cdot \frac{7,5}{6} - 7| = |7,5 - 7| = 0,5$.

d'un autre côté : $x_2 = \frac{14-6x_1}{6} = \frac{14 - 6\frac{7,5}{6}}{6} = \frac{6,5}{6}$

$x_2 = \frac{6,5}{6} \leq 7/6$ et $x_2 \in]1,2[$

$f(x_2) = |6x_2 - 7| = |6 \cdot \frac{6,5}{6} - 7| = |6,5 - 7| = |-0,5| = 0,5$.

Donc $f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$. <u>f n'est pas injective</u> !

<u>Attention</u> : Si on prend $x_1 = \frac{8}{6} \geq 7/6$ et $x_1 = \frac{8}{6} \in]1,2[$

on trouve que $x_2 = \frac{14-6x_1}{6} = \frac{14 - 6 \cdot \frac{8}{6}}{6} = \frac{6}{6} = 1$

On a bien $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$ mais ceci est un mauvais contre-exemple car $x_2 = 1 \notin]1,2[$ cela ne permet pas donc de conclure.