Bifurcation dans $\mathbb{R}^2$:

Exercice 1 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y \\ \dot{y} = \dfrac{x^2}{1+x^2} - by \end{cases}$$

On se limite au quadrant positif $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$a > 0$, $b > 0$. On suppose que b est fixé donné et que a est un paramètre variable.

1/ Esquisser le portrait de phase (en faisant varier a)

2/ faire l'étude de bifurcation

Exercice 2 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = dx + y + \sin x \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

faire l'étude de bifurcation.

Exercice 3 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = dx - y + xy^2 \\ \dot{y} = x + dy + y^3 \end{cases}$$

après linéarisation déduire le type de bifurcation.

Exercice 4 : Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = d + x^2 - y \end{cases}$$

Esquisser le portrait de phase et faire l'étude de bifurcation.

Exercice 5

On admet le lemme suivant :

Lemme : En présence d'une bifurcation de Hopf tout système $\begin{cases} x^* = 0 \\ y^* = 0 \end{cases}$ peut être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega y + f(x,y) \\ \dot{y} = \omega x + g(x,y) \end{cases} \quad \text{forme normale}$$

f et g étant des fonctions d'ordre supérieur nulles en $(0,0)$.

de plus si on pose :

$$16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega}\Big[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\Big] \quad \begin{bmatrix} f_{xx} = f_{xx}(0,0) \dots \\ g_{xy} = g_{xy}(0,0) \dots \end{bmatrix}$$

la bifurcation de Hopf est supercritique si $a < 0$

" " " " " sous-critique si $a > 0$.

Utiliser le lemme pour faire l'étude des systèmes

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda x \\ \dot{y} = -x + \lambda y - x^2 y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x^3 \\ \dot{y} = -x + \lambda y + 2y^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x^2 \\ \dot{y} = -x + \lambda y + 2x^2 \end{cases}$$

Exercice 6 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - \sin x \end{cases}$$ faire l'étude de bifurcation en $(0,0)$ d'"petit".

Ex7 :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(b - x - \dfrac{y}{1+x}\right) \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{1+x} - ay\right). \end{cases}$$

$x, y \geqslant 0, \quad a, b > 0.$

1°/ tracer les isoclines et discuter graphiquement de la bifurcation en b (a supposé fixé)

2°/ Toujours graphique remarquer l'existence d'un pt d'équilibre $(x^*, y^*) \neq (0,0)$. quel est le type de la bifurcation en ce point.