Université Abou Bekr Belkaïd Tlemcen — Année 2011-2012

Faculté de l'ingénieur — 1ère Année

Génie Productique — Outils Mathématiques

Fiche de TD 3.

Exercice 1: Trouver les équations différentielles qui ont pour solution les fonctions $y=f(x)$ suivantes:

1/ $f(x)=\alpha x \quad (\alpha\in\mathbb{R})$; 2/ $y=\alpha e^{x} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$, 3/ $y=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

Exercice 2: Résoudre les équations différentielles suivantes:

1/ $y'\sin x = y\cos x$; 2/ $y^2+(x+1)y'=0$; 3/ $xy'-ky=0 \quad (k\in\mathbb{R}^*)$.

4/ $y'=2x\sqrt{1-y^2}$; 5/ $x^2y'+y=0$; 6/ $yy'=x$.

7/ $y'-xe^{-y}=0$; 8/ $y=\ln(y')$, 9/ $y-y'=0$.

Exercice 3: Intégrer les équations différentielles suivantes

1/ $xy'=x-y$; 2/ $xy^2y'=x^3+y^3$; 3/ $x-y+xy'=0$.

Exercice 4: Résoudre par deux méthodes les équations linéaires suivantes:

1/ $y'+y=x$ 2/ $\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)y'+\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 3/ $xy'-y=x^2$.

Exercice 5: Résoudre ce qui suit:

1/ $y''+y=(x+1)$; 2/ $y''+2y'+y=e^{3x}$; 3/ $y''+5y'+6y=(x^2+1)$

Exercice 6: (supplémentaire) Résoudre

Equation de Riccati: a/ $x^3y'+y^2+yx^2+2x^4=0 \qquad (y_*=-x^2)$.

b/ $(x^2+1)y'=y^2-1 \qquad (y_*=1)$.

Equation de Bernouilli : $xy'+y=y^2\ln x$

Corrigé de la Fiche n° 3.

<u>Remarque</u>: Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les équations

<u>Exercice 1</u>:

1- $y(x) = \alpha x$ en dérivant on obtient : $y'(x) = \alpha$ i.e $y' = \frac{1}{x} y$ ou $xy' = y$

2- $y(x) = \alpha e^x$ " " " " $y'(x) = \alpha e^x$ i.e $y' = y$.

3- $y(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ " " " " $y'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ i.e $(e^x+1)y' = y$.

<u>Exercice 2</u>: Equations à variables séparables (ou séparées) ; il suffit

de mettre les "y" et les "x" de chaque côté de l'égalité ; puis utiliser la définition $y' = \frac{dy}{dx}$, il suffit alors d'intégrer

1/ $y' \sin x = y \cos x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}$ $(y \neq 0)$ (on remarquera que $y \equiv 0$ est solution)

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + c$

$\Rightarrow |y| = e^{\ln|\sin x| + c} \Rightarrow |y| = k . e^{\ln|\sin x|}$ $(k > 0, k = e^c) \Rightarrow |y| = k |\sin x|$

$\Rightarrow y = \pm k \sin x \Rightarrow y = K \sin x$ $K \in \mathbb{R}^*$ (n'oublions pas $y \equiv 0$!)

$$\boxed{y = K \sin x \quad K \in \mathbb{R}}$$

7/ $y' - x e^{-y} = 0 \Rightarrow y' = x e^{-y} \Rightarrow e^y y' = x \Rightarrow e^y dy = x dx \Rightarrow e^y = \frac{1}{2}x^2 + c$

$$\Rightarrow \boxed{y = \ln(\tfrac{1}{2}x^2 + c) \quad c \in \mathbb{R}}$$

8/ $y = \ln y' \Rightarrow y' = e^y \Rightarrow e^{-y} y' = 1 \Rightarrow e^{-y} dy = dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int dx$

$\Rightarrow -e^{-y} = x + c \Rightarrow e^{-y} = -(x+c) \Rightarrow -y = \ln(-(x+c))$

$$\Rightarrow \boxed{y = \ln\left(\frac{-1}{x+c}\right) \quad c \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3: Equations homogènes $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$; on pose $u = \frac{y}{x}$.

et on se ramène à une équation à variables séparables:

1/ $xy' = x - y \Rightarrow y' = 1 - \frac{y}{x}$. (on pose $u = \frac{y}{x}$ i.e $y = xu$, $y' = u + xu'$)

$$\Rightarrow u + xu' = 1 - u \Rightarrow xu' = 1 - 2u \Rightarrow \frac{u'}{1-2u} = \frac{1}{x} \quad \left(u \neq \frac{1}{2}\right)$$

(on remarquera que si $u = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$ qui est bien une solution)

$$\Rightarrow \frac{du}{1-2u} = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{du}{1-2u} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2du}{1-2u} = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2u| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln|1-2u| = \ln\frac{1}{x^2} + c'$$

$$\Rightarrow |1-2u| = k\frac{1}{x^2} \quad (k = e^{c'} > 0) \Rightarrow (1-2u) = K\frac{1}{x^2} \quad \left(\begin{matrix} K = \pm k \\ K \in \mathbb{R}^* \end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow 2u = 1 - \frac{K}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{K}{x^2}\right);$$

Comme $y = xu \Rightarrow y = \frac{1}{2}x\left(1 - \frac{K}{x^2}\right)$. $K \in \mathbb{R}^*$; or $y = \frac{1}{2}x$ est solution aussi

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x\left(1 - \frac{K}{x^2}\right) \quad K \in \mathbb{R}}$$

Exercice 4: Equation linéaire

1/ $y' + y = x$

1ère méthode: ESSM : $y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -dx$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x + c \Rightarrow \boxed{y_0 = Ke^{-x} \quad K \in \mathbb{R}}$$

EASM : (variation de la constante) $y_* = K(x)e^{-x}$.

$$y_*' + y_* = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = x \Rightarrow K'(x)e^{-x} = x \Rightarrow K'(x) = xe^{x}$$

$$K(x) = \int xe^x dx \underset{\text{parties}}{\overset{\text{par}}{=}} (x-1)e^x \Rightarrow y_* = K(x)e^{-x} = (x-1).$$

la solution générale est donnée par $y = y_0 + y_* = Ke^{-x} + (x-1)$

$$\boxed{y = Ke^{-x} + (x-1) \quad K \in \mathbb{R}}$$

2ème méthode: $y'+y=x \Rightarrow e^x y'+e^x y = xe^x \Rightarrow (e^x y)' = xe^x$

$$\Rightarrow e^x y = \int xe^x dx = (x-1)e^x + k \Rightarrow y = (x-1) + ke^{-x}$$

$$\boxed{y = ke^{-x} + (x-1) \quad k \in \mathbb{R}}$$

2/. $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)y' + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)y = \frac{1}{1+x^2}$.

1ère méthode: ESSM + EASM variation de la constante.

2ème méthode: il suffit de remarquer $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

ainsi $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)y' + \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)y = \left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)y\right]' = \frac{1}{1+x^2}$.

en intégrant $\frac{e^x+e^{-x}}{2} y = \text{Arctg}\,x + k \Rightarrow \boxed{y = 2\,\frac{\text{Arctg}\,x + k}{e^x+e^{-x}} \quad k \in \mathbb{R}}$

3/ $xy' - y = x^2$

1ère méthode: ESSM + EASM variation de la constante.

2ème méthode: $xy' - y = x^2 \Rightarrow \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2} = 1. \Rightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}y = x+k$

$$\boxed{y = kx + x^2 \quad k \in \mathbb{R}}$$

Exercice 5:

1/ $y''+y = (x+1)$; ESSM $y''+y=0$; Eq caractéristique $r^2+1=0 \Rightarrow r = \pm i$

$y_0 = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ solution générale de l'ESSM. $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$y_* = (x+1)$ solution particulière de l'EASM.

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = (c_1\cos x + c_2 \sin x) + (x+1) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3/ $y''+5y'+6y = (x^2+1)$; ESSM $y''+5y'+6y=0$; Eq Caractéristique $r^2+5r+6=0$; $r_1=-3$, $r_2=-2$.

$y_0 = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$ solution générale de l'ESSM.

$y_* = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$ solution particulière de l'EASM.

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{37}{108} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$