Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Technologie
Spécialité Productique

Année 2012-2013
1ère Année
Outils Mathématiques

Fiche de TD 1

Exercice 1: Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = x^x \;;\quad f(x) = e^{x^x} \;;\quad f(x) = cos(x^2) \;;\quad f(x) = cos^2(x)$$

Exercice 2 : Calculer la dérivée $n^{ème}$ des fonctions

$$f(x) = e^{ax} \;;\quad f(x) = sinx \;;\quad f(x) = \frac{1}{1-x} \;;\quad f(x) = \frac{1}{1+x} \;; f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 3: Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = (x-a)g(x)$.

Montrer que f est dérivable au point a et donner $f'(a)$.

Exercice 4: Soit f, g deux fonctions qui ne s'annulent pas, continues sur l'intervalle $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$, tel que $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

Exercice 5: Donner la dérivée des fonctions : Arctg(x), Arcsin(x) et Arcosin(x). En déduire que

Arcsin(x) + Arcosin(x)=constante, et trouver la valeur de cette constante.

(On rappelle les propriétés $y = tg(x) \Rightarrow x = arctg(y)$ et $arctg(tg(x)) = x$ et $tg(arctg(x)) = x$

$$y = sin(x) \Rightarrow x = arcsin(y) \text{ et } arcsin(sin(x)) = x \text{ et } sin(arcsin(x)) = x$$

$$y = cos(x) \Rightarrow x = arcos(y) \text{ et } arcos(cos(x)) = x \text{ et } cos(arcos(x)) = x \text{)}$$

Exercice 6: Soit x et y, deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que

$$x < \frac{y-x}{lny - lnx} < y$$

Exercice 7: En utilisant un développement de Taylor, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;;\quad \lim_{x\to 0} \frac{cosx - 1}{x} \;;\quad \lim_{x\to 0} \frac{sinx - x}{x} \;;\quad \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(sinx)^4}$$

Exercice 8: Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pour chacune des fonctions suivantes

$$f(x,y) = e^x cosy;\; f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2};\; f(x,y) = Arctg(x+y);\; f(x,y) = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

On dira que f est une fonction harmonique ssi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Parmi les fonctions précédentes, trouver celles qui sont harmoniques.

Outils mathématiques TD 1.

Ex 1. 1. $f(x) = x^x = e^{x\ln x} \Rightarrow f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = (1+\ln x)x^x.$ $(x>0)$.

2. $f(x) = e^{x^x} \Rightarrow f'(x) = (x^x)' e^{x^x} = (1+\ln x)x^x e^{x^x}.$ $(x>0)$.

3. $f(x) = \cos(x^2) \Rightarrow f'(x) = 2x(-\sin(x^2)) = -2x\sin(x^2)$

(prière de rappeler que la règle appliquée est celle de la dérivée d'une composée $[(g\circ f)(x)]' = f'(x).g'(f(x))$.

4. $f(x) = \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x\cos x$

(prière de rappeler que la règle appliquée est $(f^n(x))' = n(f'f^{n-1})(x)$).

Ex 2. 1. $f(x) = e^{ax}$; $f'(x) = ae^{ax}$; $f''(x) = a^2e^{ax}$.

On devine alors l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$.

(prière insister sur le fait qu'il faut démontrer cette formule par récurrence en utilisant le fait que $f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$).

2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$; $f'(x) = (-1)(-1)(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2}$

$f''(x) = (-2)(-1)(1-x)^{-3} = 2\times 1(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = (-3)(-1)\times 2\times 1(1-x)^{-4} = 3\times 2\times 1(1-x)^{-4}$

On devine alors que $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}$ à démontrer par récurrence

3. même technique sauf qu'il apparait un $(-1)^n$.

4. utiliser le fait que $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$.

déduire la formule de 2 et 3.

Ex 3: $f(x) = (x-a)g(x)$. le but de cet exercice classique est de provoquer l'erreur $f'(x) = ((x-a).g(x))'$, ce qui est clairement une erreur car g est supposée seulement continue. (pas nécessairement dérivable)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)g(x) - \overset{=0}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

donc $f'(a) = g(a)$.

Ex4: Il suffit de considérer la fonction $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

h est continue sur $[a,b]$ (comme rapport de 2 fcts continues) et dérivable sur $]a,b[$ (comme rapport de 2 fcts dérivables)

de plus $f(a)\cdot g(b) = f(b)\cdot g(a) \Rightarrow \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{f(b)}{g(b)} \Rightarrow h(a) = h(b)$

D'après le Théorème de Rolle : $\exists\, c \in\,]a,b[$; tel que $h'(c) = 0$

or $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$; $h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)\cdot g(c) = f(c)\, g'(c)$

donc $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{g'(c)}{g(c)}$ cqfd.

Ex5: Prière rappeler ces formules même si elles sont déjà traitées

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\mathrm{Arctg}'x = \frac{1}{1+tg^2(\mathrm{Arctg}x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\mathrm{Arcsin}'x = \frac{1}{\mathrm{Cos}(\mathrm{Arcsin}x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Arcsin}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\mathrm{Arccos}'x = \frac{-1}{\sin(\mathrm{Arccos}x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On observe alors que $\mathrm{Arcsin}'x + \mathrm{Arccos}'x = 0 \Rightarrow \mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = c.$

il suffit de donner une valeur à x par ex $x = 0 \Rightarrow c = \mathrm{Arcsin}0 + \mathrm{Arccos}0 = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

Ex6: (Cet exercice est peut être trop compliqué pour le profil de nos étudiants)

Considérer $f(t) = \ln t$ et lui appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x,y]$; f est continue sur $[x,y]$; dérivable sur $]x,y[$

alors il existe $c \in\,]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ soit $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y-x)$

Or $c \in\,]x,y[\Rightarrow x < c < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y}(y-x) < \frac{1}{c}(y-x) < \frac{1}{x}(y-x)$

Donc $\frac{1}{y}(y-x) < \ln y - \ln x < \frac{1}{x}(y-x) \Rightarrow x < \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$ cqfd.

Ex 7 : le but de cet exercice st d'utiliser la formule de Taylor (Taylor MacLaurin); s'il vous plait ne pas utiliser la notation de Landau $o(x^n)$ et utiliser plutôt $x^n \mathcal{E}(x)$. avec $\mathcal{E}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Prière aussi de rappeler les formules classiques $\sin x$, $\cos x$, e^x, ...

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin x)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^5 \mathcal{E}(x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin x)^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^4 + x \mathcal{E}(x) \left(\frac{x}{\sin x} \right)^4 \right] = -1/4 .$$

Ex 8 : le but de cet exercice est d'initier l'étudiant à la notion de dérivées partielles comme cela à été demandé par le département —

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = -e^x \sin y \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos y .$$

---

lorsque $f(x,y) = e^x \cos y$ on observe que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ (le laplacien)} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0 \quad (\forall (x,y))$$

Donc $f(x) = e^x \cos y$ st une fonction harmonique.