

Méthodes numériques appliquées
 Fiche de TD n° 4

Exercice 1 :

Soit f une fonction supposée régulière, utiliser les évaluations de f en $x+h$ et $x+2h$ pour approximer $f'(x)$.

Exercice 2 :

Montrer que

$$\frac{4f(x+h) - f(x+2h) - 3f(x)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$$

Exercice 3 :

Soit la fonction donnée par le tableau suivant

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	-2.3	-1.61	-1.2	-0.92	-0.69

Donner une approximation de $f'(0.1)$, $f'(0.2)$, $f'(0.3)$, $f'(0.25)$, $f''(0.3)$.

Exercice 4 :

Soit le tableau de données suivant

x_i	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	1	-1	-1	1	5

Trouver le polynôme d'interpolation aux points donnés, puis donner une approximation de $f'(0.5)$, de $f''(0.5)$ et de $f'(1)$, donner une majoration de l'erreur dans chaque cas. (f est supposée analytique)

Exercice 5 :

Utiliser la méthode des trapèzes simple pour évaluer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. Que pouvez-vous dire de cette estimation ?

Utiliser la méthode des trapèzes composée pour évaluer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, en prenant pour pas $h=0.1$.

Utiliser la méthode de Simpson simple pour évaluer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Utiliser la méthode de Simpson composée pour évaluer $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, en prenant pour pas $h=0.1$.

Exercice 6 : (Méthode de Newton)

Décrire la méthode de Newton-Cotes pour $n=3$, puis utiliser le résultat trouvé pour évaluer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx$,

Exercice 7 :

Soit $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on considère la formule de quadrature (d'intégration numérique) :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + E(f) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Déterminer les α_i pour que la formule donnée soit de degré de validité 2.