Fiche de TD 3

Exercice 1 :

1/ $\dfrac{3+6i}{3-4i} = \dfrac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{-15+30i}{25} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$

2/ $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2 = \left(\dfrac{1+3i}{3}\right)^2 = \dfrac{-8+6i}{9} = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{6}{9}i$

3/ $\dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i} = z+\bar{z}$ $\cdot\ z = \dfrac{2+5i}{1-i} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i \Rightarrow z+\bar{z} = -3.$

Exercice 2 :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$

$z_2 = 1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(\pi/6+\pi/4)} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ainsi $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{5\pi}{12}.$

Exercice 3 :

1/ racines carrées de $z_1 = 3-4i.$

$(x+iy)^2 = 3-4i \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ x^2+y^2 = \sqrt{3^2+4^2} \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ x^2+y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

la dernière équation permet de retrouver le signe des couples solutions ainsi x et y sont de signes opposés $(x,y) = (2,-1)$ ou $(x,y) = (-2,1)$

les racines carrées de $(3-4i)$ sont $(2-i)$ et $(-2+i)$

2/ Par la même méthode les racines carrées de $(24-10i)$ sont $(5-i)$ et $(-5+i)$

Exercice 4

$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ par la même méthode que l'exercice précédent, on arrive à trouver que les racines de z sont $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)$

D'un autre côté on observe que $z = e^{i\pi/4}$

et comme $\left(e^{i\pi/8}\right)^2 = e^{i\pi/4}$; Donc $e^{i\pi/8}$ est une racine carrée de z

$e^{i\pi/8} = \cos\pi/8 + i\sin\pi/8$; Comme $\cos\pi/8 > 0$ alors $e^{i\pi/8} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$

ainsi $\cos\pi/8 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\pi/8 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$

EXERCICES:

1/ Pour résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$

On calcule $\Delta = 3+4i$; on retrouve les racines de Δ par la même méthode de l'exercice 3 ; et on trouve : $\delta = \pm(2+i)$

et les l'équation admet pour solution:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}+2+i}{2}$$

2/ Pour résoudre $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$; on commence par poser $Z = z^2$.

Ce qui ramène l'équation à $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ qui pour $\Delta = -576$

$\Delta = (24i)^2$ ainsi $Z_1 = \dfrac{-10-24i}{2} = -5-12i$ et $Z_2 = -5+12i$

enfin pour trouver les 4 solutions de l'équation donnée ; il suffit de retrouver les racines carrées de Z_1 et de Z_2 par la même méthode de l'exercice 3

EXERCICE 6: $z_1 = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = (\sqrt{2})^3 e^{-i\pi/4}$

ainsi les racines cubiques de z_1 sont données par:

$$\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{-\pi/4}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad k = 0,1,2, \text{ ce qui donne } \begin{cases} \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{12}i} \\ \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{12}i} \\ \sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{4}i} \end{cases}$$

EXERCICE 7: 1/ $z = re^{i\theta}$; $z^3 = 1 = e^{i0} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0,1,2.$

ainsi $z_1 = 1$; $z_2 = e^{i2\pi/3}$; $z_3 = e^{i4\pi/3}$. on remarque que $z_3 = z_2^2$.

si on pose $j = e^{i2\pi/3}$; alors les racines cubiques de l'unité 1 sont : $1, j, j^2$.

2/ Par le fait que j est racine cubique de 1 on sait que $j^3 = 1$

$1+j+j^2 = j^3+j+j^2 = j(1+j+j^2) \Rightarrow j(1+j+j^2) = 1+j+j^2 \Rightarrow (j-1)(1+j+j^2) = 0$

Comme $j \neq 1$ on a $(1+j+j^2) = 0$.

3/ Les racines $n$ième de 1 sont $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $k = 0,1,2,\dots,n-1$

4/ si on pose $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors les racines de 1 s'écrivent : $1, w, w^2, w^3, \dots w^{n-1}$.

et donc $1+w+w^2+\dots+w^{n-1} = \dfrac{1-w^n}{1-w}$ or $w^n = 1$ donc $1+w+w^2+\dots+w^{n-1} = 0$.

et donc $1+w_1+w_2+\dots+w_q = 0$.