Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Algèbre

Année 2012-2013
1ère Année Spécialité Productique

Fiche de TD 3

Exercice 1 : Soient A, B et C les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B + C$, $B - C$, $B + 2C$, $2B - 3C$.
2. Calculer AB, AC, A^2, A^3.
3. Déterminer ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$, ${}^t(AB)$

Exercice 2 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Donner A^{-1}.

Exercice 3 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $M^3 - 2M^2 + 2M$.
2. Déduire de ce qui précède que la matrice M est inversible ; puis donner M^{-1}.
3. Retrouver M^{-1} par utilisation de la comatrice de M .

Exercice 4 :

I. Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. En déduire la solution du système :

$$\begin{cases} -x + y - z = \alpha_1 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - 2y + 4z = \alpha_3 \end{cases}$$

Où α_1, α_2 et α_3 sont trois réels donnés.

II. Soit la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

où a, b et c sont trois réels non nuls. Dire pour quelle(s) valeur(s) de a, b et c la matrice B est inversible.

Exercice 5 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 ; puis trouver deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$; où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Déduire de ce qui précède que la matrice A est inversible ; puis donner A^{-1}.
3. Retrouver A^{-1} par utilisation de la comatrice de A .

Indications -réponses

Exercice2:

4. $detA = 2 \neq 0$ *donc A est une matrice inversible* $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^{t}(comA) \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

1 . $M^3 - 2M^2 + 2M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

2 . On remarque -de ce qui précède - que $\frac{1}{2}M(M^2 - 2M + 2I) = \frac{1}{2}(M^2 - 2M + 2I)M = I$ *donc M est inversible*

et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 2M + 2I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

3. $M^{-1} = \frac{1}{detM}\ {}^{t}(comM) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

1 . $detA = -6 \neq 0$ *donc A est une matrice inversible* $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^{t}(comA) \quad A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2 . $\begin{cases} -x + y - z = \alpha_1 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - 2y + 4z = \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = \alpha_3 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - y + z = -\alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$

3 . $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ *donc*

$$detB = (bc^2 - cb^2) - a(c^2 - b^2) + a^2(c - b) = (c - b)(b - a)(c - a)$$

Donc B est inversible ssi $c \neq b$ *et* $b \neq a$ *et* $c \neq a$