

Méthodes numériques appliquées
 Fiche de TD n° 3

Exercice 1 :

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Estimer en utilisant une interpolation de Lagrange la valeur de $\sqrt{115}$ si on prend pour points d'interpolation $x_0=100$, $x_1=121$ et $x_2=144$. Donner une majoration de l'erreur commise.

Exercice 2 :

Soient deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$ et trois points d'interpolation $x_0=1$,

$x_1=3/2$ et $x_2=2$.

- 1) Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation aux points donnés.
- 2) Calculer le polynôme d'interpolation de Newton qui passe par les points donnés.
- 3) Trouver la valeur approchée de g au point $x=1.75$ et donner une majoration de l'erreur d'interpolation.

Exercice 3 :

Soit le tableau de données suivant

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	1	-1	-1	1	5

Trouver le polynôme d'interpolation aux points donnés, puis trouver la meilleure approximation au sens des moindres carrés par un polynôme de degré 2. Commenter les résultats.

Exercice 4 :

En utilisant la méthode des moindres carrés, trouver une approximation de la forme $f(x)=a\sin(x)+b\sin(3x)$, d'une fonction définie par les mesures

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
y_i	0	1.25	3	4	3

Exercice 5 :

Un projectile est lancé dans le vide, au moyen d'un mortier faisant un angle $\alpha < \pi/2$ avec l'horizontale. Un radar a enregistré les positions du projectile sur sa trajectoire, elles sont données par $M_1(1,3)$, $M_2(2,6)$, $M_3(3,7)$ et $M_4(4,6)$, sachant que la trajectoire est de la forme parabolique : $y=ax^2+bx+c$

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire en utilisant la méthode d'approximation par les moindres carrés.
- 2) En utilisant la méthode de Newton-Raphson, avec $x_0=6$ déterminer les coordonnées du point de chute du projectile, sachant qu'il se trouve au même niveau de la position du tir. Le test d'arrêt sera donné par : $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-3}$.
- 3) Trouver la position exacte du point de chute. Quelle est l'erreur commise en comparant ce résultat avec celui de 2).

Exercice 6 :

Un point matériel M est lancé avec une vitesse initiale $V=500\text{m/s}$ et un angle α avec l'horizon. L'évolution temporelle de l'ordonnée de M est donnée par le tableau

t_i	0	1	2	3	4	5
y_i	0.001	20.012	29.988	30.004	19.998	0.002

Ajuster les points donnés par la méthode des moindres carrés avec une fonction de la forme $f(t)=at^2+bt$.

Exercice 7 :

Nous réalisons au laboratoire l'expérience du pendule simple à très faibles oscillations. Nous faisons varier la longueur du pendule, notée L , et on note à chaque fois la période des oscillations, notée T . Les résultats des mesures sont donnés dans le tableau

L_i	1	1.5	1.75	2	2.5
T_i	2.006	2.457	2.654	2.837	3.172

La relation théorique entre T et L est de la forme $T=aL^b$ où a et b sont des constantes. Trouver, en effectuant un ajustement des points du tableau au sens des moindres carrés par la fonction $T=aL^b$ les valeurs de a et b .