Université A.B.B. Tlemcen. Année Universitaire 2010-2011

Master I Spécialité systèmes dynamiques

Equations fonctionnelles I.

Fiche de T.D. n° 03.

I/ Intégrales premières:

Exercice 1: Soit le système (I) $\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$

1°/ Trouver les pts d'équilibre et linéariser le système (I).

2°/ Trouver une intégrale première du système (I).

3°/ faire l'analyse de la conservation des centres.

Exercice 2: Soit le système (II) $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x - 3x^2. \end{cases}$

Répondre aux questions de l'exercice 1 pour le système (II).

II/ Fonctions de Lyapunov

Exercice 1: Soit le système $\begin{cases} \dot{x} = ax - y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + ay - y(x^2+y^2). \end{cases}$ (III)

1°/ linéariser le système III au voisinage de $(0,0)$; Conclure!

2°/ Déterminer la nature (stabilité - instabilité) du point d'équilibre $(0,0)$ En utilisant une fonction de Lyapunov.

3°/ Montrer l'existence d'un cycle limite

EXERCICE 2: Soit l'équation:

$$\ddot{x} + b\dot{x}^3 + x = 0. \qquad (E).$$

1°/ Ramener (E) à un système de deux équations du premier ordre (on notera ce système (IV)).

2°/ Linéariser (IV) au voisinage du point d'équilibre. Conclure!

3°/ Utiliser une fonction de Lyapunov pour étudier la stabilité du point d'équilibre.

III/ Théorème de Poincaré-Bendixon:

EXERCICE 1:

On considère le système suivant:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases} \qquad (V)$$

1°/ Faire l'étude de la stabilité au voisinage des points d'équilibre par linéarisation.

2°/ Soit $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$; étudier le signe de $\dot{V}$ pour $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ et pour $x^2 + y^2 > 1$

3°/ Conclure en utilisant le théorème de Poincaré-Bendixon.

EXERCICE 2: Soit le système: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x - 5y + \frac{6y}{1+x^2}. \end{cases}$

1°/ Faire l'étude de la stabilité des points d'équilibre par linéarisation.

2°/ Soit $V(x,y) = 2x^2 + y^2/2$; étudier le signe de $\dot{V}$.

3°/ Montrer l'existence d'un cycle limite.