Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2012-2013
$1^{ère}$ Année
Outils Mathématiques

Fiche de TD 2

Exercice 1 : Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I_1 = \int (x^2+3x+1)e^x dx; \quad I_2 = \int (3x^2+x)\cos x dx; \quad I_3 = \int (x^2-1)\sin x dx;$$

$$I_4 = \int x^n \ln x dx \quad n \in \mathbb{N}; \quad I_5 = \int Arctg x dx; \quad I_6 = \int Arcsin x dx.$$

Exercice 2 : Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J.

1. $I = \int (\sin x).e^x dx$; $J = \int (\cos x).e^x dx$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x).e^x dx$

Exercice 3 : Utiliser un changement de variable pour calculer ce qui suit :

$$I_1 = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx; \quad I_2 = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx; \quad I_4 = \int \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$$

$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$ (indication : on donne $\frac{t}{t^2-5t+6} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2}$); $I_6 = \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

Exercice 4 : Calculer ce qui suit

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx; \quad I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5} dx; \quad I_3 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx; \quad I_4 = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx; \quad I_5 = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)(x+1)^2} dx$$

Exercice 5: Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int \frac{1}{5-3\cos x} dx; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 x} dx; \quad I_3 = \int \frac{1}{\cos x} dx; \quad I_4 = \int \frac{1}{4-5\sin x} dx;$$

$$I_5 = \int \sin^3 x dx; \quad I_6 = \int \cos^4 x dx;$$

Exercice 6 : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-a, a]$; $a > 0$. Montrer que

1. Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
2. Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercice 7 : Une voiture roule à une vitesse $v(t) = v_0 t(1-t) kmh^{-1}$, durant l'intervalle $0 \le t \le 1h$. Quelle a été sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcouru ?

Exercice 8 : (supplémentaire)

Calculer $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$, où $n \in \mathbb{N}$.

Indication : en utilisant une intégration par parties, commencer par trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.

Exercice 9 : (supplémentaire)

Calculer $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{(1-x)} dx$, où $n \in \mathbb{N}$.

Indication : en utilisant une intégration par parties, commencer par trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

Fiche de TD 2.

EXERCICE 1 :

- $I_1 = \int (x^2+3x+1)e^x\,dx = \int x^2e^x\,dx + 3\int xe^x\,dx + \int e^x\,dx$

$\int xe^x\,dx = \begin{cases} f(x)=x \longrightarrow f'(x)=1 \\ g'(x)=e^x \longrightarrow g(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1).$

$\int x^2e^x\,dx = \begin{cases} f(x)=x^2 \longrightarrow f'(x)=2x \\ g'(x)=e^x \longrightarrow g(x)=e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2(e^x(x-1))$

$I_1 = x^2e^x - 2e^x(x-1) + 3e^x(x-1) + e^x + C \quad (C\in\mathbb{R}).$

$\boxed{I_1 = (x^2+x)e^x + C \quad (C\in\mathbb{R})}$

Pour I_2, et I_3 on appliquera la même technique.

- $I_4 = \int x^n \ln x\,dx = \begin{cases} f(x)=\ln x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \\ g'(x)=x^n \longrightarrow g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$$I_4 = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\boxed{I_4 = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C. \quad (C\in\mathbb{R})}$$

Remarque :
On pourra faire remarquer à l'étudiant que pour $n=0$ on obtient

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$$

- $I_5 = \int \mathrm{Arctg}\,x\,dx = \int 1\times \mathrm{Arctg}\,x\,dx = \begin{cases} f(x)=\mathrm{Arctg}\,x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \\ g'(x)=1 \longrightarrow g(x)=x. \end{cases}$

$$I_5 = x\,\mathrm{Arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{I_5 = x\,\mathrm{Arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \quad C\in\mathbb{R}}$$

- $I_6 = \int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx = \begin{cases} f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x)=1 \longrightarrow g(x)=x. \end{cases}$

$$I_6 = x\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\boxed{I_6 = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C \quad C\in\mathbb{R}}$$

EXERCICE 2 :

$$I=\int \sin x\, e^x \xrightarrow[\text{parties}]{\text{par}} \begin{cases} f(x)=\sin x \longrightarrow f'(x)=\cos x \\ g'(x)=e^x \longrightarrow g(x)=e^x. \end{cases}$$

$$I=e^x.\sin x-\int e^x\cos x\,dx \quad \text{donc} \quad \boxed{I=e^x\sin x-J}$$

$$J=\int \cos x\, e^x \xrightarrow[\text{parties}]{\text{par}} \begin{cases} f(x)=\cos x \longrightarrow f'(x)=-\sin x \\ g'(x)=e^x \longrightarrow g(x)=e^x. \end{cases}$$

$$J=e^x\cos x-\int -\sin x\, e^x\,dx \quad \text{donc} \quad \boxed{J=e^x\cos x+I}$$

On obtient alors le système $\begin{cases} I=e^x\sin-J \\ J=e^x\cos x+I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J+I=e^x\sin x \\ J-I=e^x\cos x \end{cases}$

ainsi $\boxed{J=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C \quad \text{et} \quad I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C}$

EXERCICE 3 :

- $I_1=\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ On pose $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow I_1=\int\frac{dt}{1+t^2}=\text{Arctg}\,t+C=\text{Arctg}\,e^x+C$
- $I_2=\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ On pose $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx \Rightarrow I_2=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$
- $I_3=\int\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)^2}}dx$ On pose $t=\frac{x}{\sqrt5}\Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt5}dx \Rightarrow I_3=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\text{Arcsin}\,t+C$ $=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt5}\right)+C$
- $I_4=\int\frac{1}{2\sin^2x+3\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x\left(2\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+3\right)}=\int\frac{dx}{\cos^2x\,(2\text{tg}^2x+3)}$ On pose $t=\text{tg}\,x \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2x}dx$

$$I_4=\int\frac{dt}{2t^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+3/2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2+1}$$ On pose $u=\sqrt{\frac{2}{3}}t \Rightarrow du=\sqrt{\frac{2}{3}}dt.$

$$I_4=1/3\int\frac{\sqrt{3/2}\,du}{u^2+1}=\frac{1}{\sqrt6}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{\sqrt6}\text{Arctg}\,u+C=\frac{1}{\sqrt6}\text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)+C=\frac{1}{\sqrt6}\text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\text{tg}\,x\right)+C$$

- $I_5=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{\sin^2x-5\sin x+6}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos x\sin x}{\sin^2x-5\sin x+6}dx$ On pose $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x\,dx$
  $x=0\Rightarrow t=\sin 0=0$
  $x=\pi/2\Rightarrow t=\sin\pi/2=1.$

$I_5=\int_0^1\frac{2t}{t^2-5t+6}dt$ Il faut indiquer aux étudiants la décomposition

$\frac{2t}{t^2-5t+6}=\frac{6}{t-3}-\frac{4}{t-2}$; $I_5=10\ln 2-6\ln 3.$

EXERCICE 4:

1- $I_1=\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$ On pose $t=\frac{x+1}{2}$, $dt=\frac{1}{2}dx$.

$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\text{Arctg}\, t + C = \frac{1}{2}\text{Arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$

2. $I_2=\int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-5)}\,dx$

[La décomposition en éléments simples ne sera pas abordée en cours; je vous prie d'aider les étudiants en leur indiquant par exemple que

$$\frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2}{x-5} \quad]$$

$I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-5} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} = \frac{1}{4}\left(\ln|x-5| - \ln|x-1|\right)+C$

$= 1/4 \ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.$

3. $I_3 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+3}\,dx = 1/2\ln(x^2+2x+3) - 2\int\frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$

$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx \;\ldots\;.$

Ex5: pour I_1, I_2, I_3, et I_4 on pose $t=\text{tg}\,x/2$; $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Pour $I_5 = \int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$ on pose $t=\cos x$.

pour $I_6 = \int \cos^4 x\,dx$ utiliser $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ pour linéariser l'expression $\int \cos^4 x\,dx$

Ex6: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$ = On pose $t=-x$, $dt=-dx$, $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx$

et f paire $-\int_a^0 = \int_0^a$ $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ cqfd.

Ex7: $V(t) = V_0\, t(1-t) = V_0(t-t^2)$

Vitesse max: $V'(t)=0 \Rightarrow 1-2t=0 \Rightarrow t=1/2$, $V(1/2)=\frac{V_0}{4}$

Distance parcourue $x(t)=\int_0^1 v(t)dt \Rightarrow x(t) = V_0\int_0^1 t-t^2 = V_0\left[t^2/2 - t^3/3\right]_0^1 = \frac{V_0}{6}.$