Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Spécialité Productique

Année 2012-2013
1ère Année
Algèbre

Fiche de TD 2

Exercice 1: Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?bijective ?

Exercice 2 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = |2x + 5|$$

1. f est-elle injective ?surjective ? bijective ?

Exercice 3 : Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Soit à présent $g: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'expression de sa fonction inverse.

Exercice 4 : Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que l'application $g: [-1, 1] \to [-1, 1]$ $telle\ que$ $g(x) = f(x)$ est une application bijective.

Exercice 5 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$. L'application f ainsi définie est elle bijective ?

Exercice 6 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?
4. Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.
5. Par <u>deux méthodes différentes</u>, retrouver l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice 7 : (Supplémentaire) Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit g définie comme suit :

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{y_0\}$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1. Comment doit- on choisir le réel x_0 pour que g soit une application ?
2. Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que g soit une application injective ?
3. Comment doit- on choisir a, b, c, d et le réel y_0 pour que g soit une application surjective ?
4. Comment doit-on choisir a, b, c, d, x_0 et y_0 pour que g soit une application bijective ?

Exercice 8 : (Supplémentaire) On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$. Montrer que :

1. $(g \circ f)\, injective \Rightarrow f\ injective$
2. $(g \circ f)\, surjective \Rightarrow g\ surjective$
3. $\big((g \circ f)\, et\ (h \circ g)\, bijectives\big) \Rightarrow (f, g\ et\ h\ sont\ bijectives)$

Corrigé Fiche de TD 2.

Exercice 1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = 3x+5.$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1+5 = 3x_2+5 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Donc f est injective.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = 3x+5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3}$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x = \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$; Donc f est surjective.

3- f étant injective et surjective f est donc bijective.

Exercice 2 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = |2x+5| = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \geq -5/2 \\ -2x-5 & \text{si } x \leq -5/2 \end{cases}$$

1- Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |2x_1+5| = |2x_2+5|$.

il y'a 4 cas possibls si $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$ on trouve $x_1 = x_2$.

si $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$ on trouve $x_1 = x_2$.

par contre si $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$ (ou $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1+5 = -2x_2-5 \Rightarrow 2(x_1+x_2) = -10 \Rightarrow x_1+x_2 = -10/2 = -5$.

par exemple $x_1 = 0 \geq -5/2$ et $x_2 = -5 \leq -5/2$.

$f(x_1) = f(0) = 5$; $f(x_2) = f(-5) = 5$ Donc $f(0) = f(-5)$ mais $0 \neq -5$

Donc f n'est pas injective. (Donc f n'est pas bijective)

2- Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = |2x+5|$.

Si $y < 0$ ($y = -3$ par exemple) l'équation $y = |2x+5|$ ne possède pas de solution car $|2x+5| \geq 0$; Donc f n'est pas surjective (Donc f n'est pas bijective)

Exercice 3 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x^2-1.$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$.

par exemple : $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $f(x_1) = f(x_2) = 3$ mais $x_1 \neq x_2$, Donc f n'est pas injective !

• Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2$.

si $(y+1 < 0)$ i.e. $(y < -1)$ l'équation $y = x^2 - 1$ ne possède pas de solution, par exemple $y = -3$; $-3 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = -2$

cette équation ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$. donc f n'est pas surjective.

2- $g : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$; $g(x) = x^2 - 1$.

• $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$; $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $(x_1 = -x_2)$ $\leftarrow$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ refusé

$\Rightarrow x_1 = x_2$ g est injective.

• $y \in [0, +\infty[$; $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$

$y \in [0, +\infty[$ donc $y + 1 > 0$; $x = \pm\sqrt{y+1}$ on observe que

$y \geq 0 \Rightarrow y + 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} \geq 1$ donc $\sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$.

Donc $\forall y \in [0, +\infty[$; $\exists x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$; tel que $y = g(x)$ - Donc g surjective.

• g est donc bijective $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$.

On accepte $x = +\sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$ et on rejette $x = -\sqrt{y+1}$.

$y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$ Donc $g^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$

$x \longmapsto g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

EXERCICE 4 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow 2x_2(1+x_1^2) = 2x_1(1+x_2^2)$

$\Rightarrow x_2 + x_2 x_1^2 = x_1 + x_1 x_2^2 \Rightarrow x_2 - x_1 + x_2 x_1^2 - x_1 x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1) + x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 x_2 = 1$.

En prenant $x_1 = 2$ et $x_2 = 1/2$ $(x_1 x_2 = 1)$ on a $f(x_1) = f(2) = \frac{4}{5}$ et $f(x_2) = f(1/2) = \frac{4}{5}$.

Donc $f(2) = f(1/2)$ mais $1/2 \neq 2$ donc f n'est pas injective.

2- Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y(1+x^2) = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$.

équation à résoudre en x ; $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2)$.

si $y > 1$ ou $y < -1$ $\Delta < 0$. pas de solution

Si on prend par exemple $y=3$; $y=f(x) \Rightarrow 3 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 3x^2-2x+3=0.$

$\Delta = 4-36 = -32<0$ donc l'équation $3=f(x)$ ne possède pas de solution x.

$y=3$ ne possède pas d'antécédent par f ; donc f n'est pas surjective.

2. $g: [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$; $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- Soit $x_1, x_2 \in [-1,1]$; $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 x_2 = 1$.

$x_1 x_2 = 1$ est rejeté car $x_1, x_2 \in [-1,1]$ $\quad x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/x_2$

Si $-1 \leq x \leq +1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} \geq -1$. le cas limite $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$
$x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$.

Donc $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ donc g injective.

- Soit $y \in [-1,1]$, $y = g(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$.

$\Delta = 4(1-y^2)$ Comme $y \in [-1,1]$ $\Delta > 0$

Donc l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$ possède une solution x

il reste à vérifier que cette solution x appartient à $[-1,1]$ (car $g: [-1,1] \to [-1,1]$)

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4(1-y^2)}}{2y}, \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{4(1-y^2)}}{2y}.$$

si $y=0 \Rightarrow x = 0 \in [-1,1]$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$x_2 \notin [-1,1]$ $\quad 1+\sqrt{1-y^2} \geq 1$ et $y \in [-1,1] \Rightarrow x_2 \notin [-1,1]$.

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{(1-\sqrt{1-y^2})(1+\sqrt{1-y^2})}{y(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{1-(1-y^2)}{y(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$$

Comme $1+\sqrt{1-y^2} \geq 1$ et $y \in [-1,1]$ alors $x_1 \in [-1,1]$

$\forall y \in [-1,1]$, $\exists x = x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1,1]$, $y = g(x)$ donc g surjective.

! si $y=0$, $\exists x = 0$ $y = f(x)$

Ex5 : Il suffit de remarquer par exemple que f symétrique $f(x,y) = f(y,x)$

Donc par exemple $f(2,5) = f(5,2)$ mais $(2,5) \neq (5,2)$ f n'est pas injective donc pas bijective.