

Fiche de TD 2

Exercice 1: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x + 5$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = |2x + 5|$$

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 3: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Soit à présent $g: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'expression de sa fonction inverse.

Exercice 4 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que l'application $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ est une application bijective.

Exercice 5 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$. L'application f ainsi définie est elle bijective ?

Exercice 6 : Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x + 1}{2x - 1}$$

2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?
4. Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.
5. Par deux méthodes différentes, retrouver l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice 7 : (Supplémentaire) Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit g définie comme suit :

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{y_0\}$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

1. Comment doit-on choisir le réel x_0 pour que g soit une application ?
2. Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que g soit une application injective ?
3. Comment doit-on choisir a, b, c, d et le réel y_0 pour que g soit une application surjective ?
4. Comment doit-on choisir a, b, c, d, x_0 et y_0 pour que g soit une application bijective ?

Exercice 8 : (Supplémentaire) On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$. Montrer que :

1. $(g \circ f)$ injective $\Rightarrow f$ injective
2. $(g \circ f)$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
3. $((g \circ f)$ et $(h \circ g)$ bijectives) $\Rightarrow (f, g$ et h sont bijectives)