Fiche de TD Fonctions.

EXERCICE 0.8 : Remarque : Avant d'étudier la parité d'une fonction, il faut toujours d'abord vérifier que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0.

1. $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = f(x)$ donc f est paire

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire. (produit ou rapport de fonction paire et fonction impaire)

3. $f(x) = x^n$ $\quad D_f = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-1)^n x^n$ si n pair alors f est paire
si n impair alors f est impaire.

EXERCICE 0.9 : $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$ $\quad (D_f = \mathbb{R})$

D'un coté $0 \leq |\cos x| \leq 1$; et d'un autre côté $1+x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

et comme $\frac{1}{1+x^2} \geq 0$ alors $|f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq 1$; et par suite f est bornée.

EXERCICE 0.10 :

- $\lim_{x\to 1} 3x+3 = 6$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \ |x-1| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$.

Nous cherchons à obtenir $|f(x)-6| < \varepsilon$ ie $|3x+3-6| = |3x-3| < \varepsilon$ et donc $3|x-1| < \varepsilon$

Il suffit pour cela que $|x-1| < \varepsilon/3$, il suffit donc de prendre $\alpha_\varepsilon = \varepsilon/3$.

- $\lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon > 0, \ |x-1| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$

Nous cherchons à obtenir $|f(x)-3| < \varepsilon$ ie $|x^2+x+1-3| < \varepsilon$ soit $|(x-1)(x+2)| < \varepsilon$

Comme x tend vers 1 on peut légitimement supposer par exemple que $x \in]1-3, 1+3[=]-2, 4[$

Donc $(x+2) \in]0,6[\Rightarrow 0 < x+2 < 6 \Rightarrow -6 < x+2 < +6 \Rightarrow |x+2| < 6$

$|f(x)-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-1||x+2| < \varepsilon$ pour obtenir ceci et comme $|x+2| < 6$

il suffit par exemple d'avoir $|x-1| < \varepsilon/6$

Mais n'oublions pas que nous avons imposé la condition $x \in]-2,4[$ soit $|x-1| < 3$

$\left.\begin{array}{l} |x-1| < \varepsilon/6 \\ |x-1| < 3 \end{array}\right\}$ il suffit de prendre $\alpha = \min\{\varepsilon/6, 3\}$ (comme $\varepsilon \ll$ c'est que $\alpha = \varepsilon/6$ mais il vaut mieux préciser $\alpha = \min\{\varepsilon/6, 3\}$)

EXERCICE 0.11 :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$.

Si $a=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

Si $a\neq 0$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \dfrac{2a}{3a^2} = \dfrac{2}{3a}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = 1/2$.

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Si $a=0$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = 0$.

. Si $a\neq 0$ $\quad \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}}\right]$

$$= \lim_{x\to a} \left[\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\,\sqrt{x+a}}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{x+a}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

<u>Exo.12</u>:

$\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas ; il suffit de considérer les deux suites

$U_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ et $V_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$, mais

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{U_n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{V_n}\right) = -1$ Donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

pour $\sin\frac{1}{x}$ considérer par exemple $U_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $V_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $U_n \to 0$, $V_n \to 0$

$\sin\left(\frac{1}{U_n}\right) \longrightarrow 0$ et $\sin\left(\frac{1}{V_n}\right) \longrightarrow 1$.

Par contre $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^3 \cos\frac{1}{x} = 0$ (Produit de fonction bornée et fonction tendant vers 0)

<u>Ex 0.13</u>:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-2}{2} & \text{si } x\geq 1 \\ \cos(x-1) & x<1 \end{cases}$ Pour $x\neq 1$ f est continue, reste à étudier la continuité en $x_0 = 1$.

$f(1) = \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{3}{2} = 3/2$, $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = 3/2$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = 1$ Donc f n'est pas continue en $x_0 = 1$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ Pour $x\neq 0$, f est continue, reste à étudier la continuité en $x_0 = 0$

$f(0)=0$; $\lim_{x\to 0} x^n \sin\frac{1}{x}$. Si $n=0$ $\lim_{x\to 0} \sin 1/x$ n'existe pas

Si $n\neq 0$ $\lim_{x\to 0} x^n \sin 1/x = 0 = f(0)$

- Si $n\neq 0$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Si $n=0$ alors f n'est pas continue en $x_0=0$

EXERCICE 0.14

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3-\alpha x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$$ Pour $x\neq 1$ f est continue (polynôme)

Pour obtenir la continuité en $x_0=1$, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$.

$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)=2$, $\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=3-\alpha$, il suffit donc d'avoir $3-\alpha=2 \Rightarrow \alpha=1$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha=1$.

EXERCICE 0.15.

- f_1 n'est pas définie en 0, $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f_1(x)=1$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f_1(x)=-1$

Donc $\lim_{x\to 0} f_1(x)$ n'existe pas, et donc f_1 n'est pas prolongeable par continuité en 0.

- f_2 n'est pas définie en ± 1, $\lim_{x\to 1} f_2(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\sin x}{2\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\sin 1}{4}$.

$\lim_{x\to -1} f_2(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\sin x}{2(x-1)(x+1)} = \infty$

en conclusion f_2 est prolongeable par continuité en $x_0=1$ mais ne l'est pas en $x_0=-1$.
et son prolongement s'écrit $\tilde{f_2}=\begin{cases} f_2(x) & \text{si } x\neq 1 \\ \frac{\sin 1}{4} & \text{si } x=1.\end{cases}$

- f_3 n'est pas définie en 0, $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas, f_3 n'est pas prolongeable par continuité.

EXERCICE 0.16 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, puis initier les étudiant à la méthode de Dichotomie (Cet exercice ne sera traité que si le temps le permet.)