Université A.B.B. Tlemcen — Année Universitaire 2010-2011.

Master I — Spécialité : Systèmes Dynamiques.

Equations fonctionnelles I.

Fiche de T.D. 2.

Théorie Générale :

Exercice 1 : Résoudre ce qui suit :

① $\begin{cases} \dot{x} = -2x+7y \\ \dot{y} = 2x+3y \end{cases}$ $(x_0,y_0)=(1,1)$; ② $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ avec $(x_0,y_0)=(1,-1)$.

③ $\begin{cases} \dot{x} = -4x+y \\ \dot{y} = -x-2y \end{cases}$ $(x_0,y_0)=(1,2)$; ④ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x-2y. \end{cases}$

(Pour le système ② proposer une autre approche ; Donner une interprétation).

Exercice 2 : Faire l'étude des systèmes suivants :

(Points d'équilibre, linéariser, Isoclines nulles, nature des points d'équilibre, allure du champ de vecteurs, esquisser le portrait de phase).

① $\begin{cases} \dot{x} = y^2-x^2 \\ \dot{y} = x-1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = (1+x)(1-y). \end{cases}$

Exercice 3 : On considère les deux systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} \dot{x} = -y+x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x+y(x^2+y^2) \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dot{x} = -y-x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x-y(x^2+y^2). \end{cases}$

1°/ Linéariser les systèmes (1) et (2) au voisinage de $(x^*,y^*)=(0,0)$, que remarquez-vous ?

2°/ Sans linéariser étudier la stabilité de $(x^*,y^*)=(0,0)$.

Conclure !!

II/ Applications:

EXERCICE 4: Soit une population structurée en deux classes d'age : les juvéniles et les adultes de densités respectives $n_1(t)$ et $n_2(t)$.

Obéissant aux équations :
$$\begin{cases} \dot{n}_1 = b n_2 - v n_1 \\ \dot{n}_2 = v n_2 - d n_2 \end{cases} \quad (v, b, d > 0).$$

1°/ Donner une interprétation du modèle.

2°/ Faire l'étude qualitative des points d'équilibre

EXERCICE 5: On considère le système :
$$\begin{cases} \dot{x} = r x\left(1-\frac{x}{K}\right) - axy - Ex \\ \dot{y} = s y\left(1-\frac{y}{M}\right) - bxy - Fy. \end{cases} \quad (I)$$
où tous les paramètres sont positifs.

1°/ Donner une interprétation du modèle.

2°/ Ramener le système (I) au système
$$\begin{cases} \dot{u} = \rho u(1-u) - \alpha u v \\ \dot{v} = \sigma v(1-v) - \beta u v \end{cases} \quad (II)$$

3°/ Faire l'étude du système (II) : (points d'équilibre, stabilité locale, esquisser le portrait de phase pour : $(\sigma > \beta\ ;\ \rho > \alpha), (\sigma < \beta\ \ \rho < \alpha)$)

EXERCICE 6: Soient n_1 et n_2 deux variable de densité de deux populations se trouvant dans deux sites différents ; on considère le système :
$$\begin{cases} \dot{n}_1 = (\alpha n_1 n_2 - \beta n_1 n_2) + r_1 n_1\left(1-\frac{n_1}{K_1}\right) \\ \dot{n}_2 = (\beta n_1 n_2 - \alpha n_1 n_2) + r_2 n_2\left(1-\frac{n_2}{K_2}\right). \end{cases}$$

1°/ Donner une interprétation du modèle.

2°/ Dans le plan de phase on se limitera au quadrant positif. Déterminer alors les points d'équilibre, et faire l'étude de la stabilité locale de chacun des points d'équilibre.

3°/ Esquisser le portrait de phase.

E<u>XERCICE 7</u>: Une population de taille N, sujette à une infection est modélisée par :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta IS + \gamma R \\ \dot{I} = \beta IS - \nu I \\ \dot{R} = \nu I - \gamma R \end{cases}$$

S : Sains
I : Infectés
R : Récovered (Immunisés)

1°/ Montrer que $S + I + R = C^{te}$; que vaut cette constante ?

2°/ Rechercher les points d'équilibre assurez-vous qu'ils se trouvent dans le quadrant positif

3°/ En utilisant la première question, ramener le système initial à un système de deux équations, puis faire l'étude de ce dernier (points d'équilibre, linéarisation, stabilité locale).

4°/ • On suppose que $I(0) = 0$ et $S(0) > 0$ que se passe-t-il ? interpreter !

• On suppose que $0 < I(0) = \varepsilon << 1$, $S(0) > 0$ que se passe-t-il ? interpreter !

E<u>XERCICE 8</u>: Le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\dfrac{abM}{N}\right) y(1-x) - rx \\ \dot{y} = ax(1-y) - \mu y. \end{cases}$$

est un modèle représentant la dynamique de la transmission de la malaria où la population hôtes (les hommes) et la population vecteurs sont des moustiques (femelles), avec :

$x \equiv$ est la proportion d'individus infectés dans la population humaine

$y \equiv$ " " " " " " " " moustique.

$N \equiv$ taille de la population humaine.

$M \equiv$ taille de la population moustique femelles.

$a \equiv$ nombre de piqûres par unité de temps.

$\equiv$ la proportion de piqûres occasionnant effectivement la maladie

$\equiv$ la vitesse de guérison d'un homme malade

$\mu \equiv$ le taux de mortalité des moustiques.

1°/ Donner une interprétation des équations !

2°/. Trouver les points d'équilibre du système (s'ils existent).

. On pose $\alpha = \frac{abM}{N}$, $R = \frac{a\alpha}{\mu r}$ exprimer le point d'équilibre non trivial en fonction de α, R et μ; Etudier sa stabilité locale.

3°/ tracer le portrait de phase

<u>Exercice 9</u>: "La rumeur qui court"

Dans une Une population fermée - de taille constante - $(N+1)$, court une rumeur... Soit alors: $x \equiv$ le nombre de personnes ignorant la rumeur

$y \equiv$ le nombre de personnes qui répandent activement la rumeur.

$z \equiv$ le nombre de personnes qui connaissent la rumeur mais ne la répandent pas.

Le taux de contact entre deux catégories est supposé constant $= \mu$.

on obtient alors le système
$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu xy \\ \dot{y} = \mu[xy - y(y-1) - yz] \end{cases}$$

1°/ Interpréter les équations.

2°/ Montrer que si initialement $y = 1$ et $x = N$, le nombre de personnes ignorant la rumeur x_1 est donné par: $2N + 1 - 2x_1 + N\ln\left(\frac{x_1}{N}\right) = 0$.

(on fera l'hypothèse que si deux personnes répandant la rumeur se croisent alors il cessent de la répandre).