Fiche de TD 1

Exercice 1 : *Soient p et q deux propositions données en utilisant la table de vérité, montrer que*

1. $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Exercice 2 : *Soient p, q et r trois propositions données. En utilisant la table de vérité, vérifiez que les propositions suivantes sont vraies*

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
3. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

Exercice 3 : *Former la négation des propositions suivantes :*

1. $[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
2. $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)$

Exercice 4 : *Montrer à l'aide d'un exemple que la relation*

$$(\forall x)(\exists y)P \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P$$

n'est généralement pas vraie.

Exercice 5 : *Soit A et B deux ensembles donnés, montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.*

Exercice 6 : *Soit A, B et C trois ensembles donnés, montrer que $A \cap C = A \cup B$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.*

Exercice 7 : *Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer l'égalité*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exercice 8 : ***Raisonnement par implication directe***

Sachant que pour tout entier naturel n on a : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, montrer que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Exercice 9 : ***Raisonnement par récurrence***

Montrer par récurrence ce qui suit

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 10 : *(supplémentaire)* ***Raisonnement par contraposition***

Montrer que : $n^2\ pair \Rightarrow npair$

Exercice 11 : *(supplémentaire)* ***Raisonnement par l'absurde***

Montrer que : 1. $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

2. $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ *est irrationnel.*

Algèbre

Corrigé TD1

Exercice 1 : ***Soient p et q deux propositions données en utilisant les tables de vérité, montrer que***

1. $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$ ***il suffit de dresser une table de vérité***

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{(p \Rightarrow q)}$	$\overline{q}$	$(p \wedge \overline{q})$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0

2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

Il faut commencer par rappeler la définition de l'implication ; en effet $(p \Rightarrow q)$ est par définition $(\overline{p} \vee q)$ et donc $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ est par définition $(q \vee \overline{p})$. Il suffit à présent de dresser la table de vérité

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Remarque : on aurait pu faire cet exercice sans utiliser les tables de vérité.

Exercice 2 : ***Soient p, q et r trois propositions données. Vérifier que les propositions suivantes sont vraies***

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$

3. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

Cet exercice aussi se traite comme le précédent, il suffit de dresser des tables de vérité.

Exercice 3 : ***Former la négation des propositions suivantes :***

1. $[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$

Par utilisation des lois de Morgan on obtient

$$\overline{[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})} \Leftrightarrow \overline{[(\overline{p} \vee q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})} \Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}] \vee (p \wedge q)$$

Exercice 4 : ***Pour montrer que l'on ne peut pas en général commuter les quantificateurs universel et existentiel il suffit de donner un contre-exemple en effet :***

$$(\forall \text{un être humain } x)(\exists \text{ un prénom } y) \text{tel que } y \text{ est le prénom de } x$$
$$\Rightarrow (\exists \text{ un prénom } y)(\forall \text{un être humain } x) \text{tel que } y \text{ est le prénom de } x$$

L'implication est évidemment fausse, l'hypothèse étant vraie et la conclusion étant fausse l'implication est fausse.

Exercice 5 : *Soit A et B deux ensembles donnés, montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.*

Pour montrer l'égalité entre deux ensembles il est souvent pratique de montrer la double inclusion ; en effet

Soit $x \in A$ donc $x \in A \cup B$; or par hypothèse $A \cap B = A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ et par suite $x \in B$, donc $A \subset B$

Soit $x \in B$ donc $x \in A \cup B$; or par hypothèse $A \cap B = A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ et par suite $x \in A$, donc $B \subset A$; de la double inclusion découle l'égalité.

Exercice 6 : *Il faut montrer $(A \cap C = A \cup B) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)$*

" $\Leftarrow$ " Hypothèse $(B \subset A \subset C)$

$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ *et* $A \subset C \Rightarrow A \cap C = A$ *donc* $(B \subset A \subset C) \Rightarrow (A \cap C = A \cup B)$

"$\Rightarrow$" Hypothèse $(A \cap C = A \cup B)$

On sait que $B \subset A \cup B$ or $A \cap C = A \cup B$ donc $B \subset A \cap C$, et par suite $B \subset A$.

D'un autre côté on sait que $A \subset A \cup B$ or $A \cap C = A \cup B$ donc $A \subset A \cap C$, et par suite $A \subset C$.

En conclusion $(B \subset A \subset C)$

Exercice 7 : *Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer l'égalité*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Il faut rappeler que $A \setminus B = A \cap \complement B$; où $\complement B$ est le complémentaire de B, donc

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \complement(A \cap B) = (A \cup B) \cap (\complement A \cup \complement B) = (A \cap \complement A) \cup (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) \cup (B \cap \complement B) = \emptyset \cup (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) \cup \emptyset = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exercice 8 : ***Raisonnement par implication directe***

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *est l'hypothèse, et il faut montrer que* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$