SUITES

Exercice 0.1 *En utilisant la définition de la limite montrer que*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{9} = 1.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si\ \ q>1 \\ 1 & si\ \ q=1 \\ 0 & si\ \ 0<q<1 \end{cases}$

Exercice 0.2 *Calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^n$

Exercice 0.3 *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. *Montrer que* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 0.4 *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \frac{2}{9} \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$.
2. *Etudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 0.5 *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. *Etudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 0.6 *Montrer que les deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *définies par*

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

sont adjacentes.

Exercice 0.7 *Montrer que la suite de terme général* $u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ *est divergente.*

Fiche de TD Suite.

<u>EXERCICE 1</u> : $(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell) \iff (\forall \varepsilon>0, \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}\ (n\geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon)$

1- $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$

Soit $\varepsilon>0$ quelconque ; on cherche η_ε pour que l'on ait pour $n\geq \eta_\varepsilon$

$\left|\frac{2n+1}{n+2}-2\right|<\varepsilon$ soit, $\left|\frac{2n+1-2(n+2)}{n+2}\right|<\varepsilon$, ou encore $\left|\frac{-3}{n+2}\right|<\varepsilon$

et donc $\frac{3}{n+2}<\varepsilon$, pour cela il suffit (par exemple) de choisir

$\frac{n+2}{3}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}-2$; $\eta_\varepsilon\in\mathbb{N}$; $\eta_\varepsilon=\left[\frac{3}{\varepsilon}-2\right]+1$

(Remarque : On peut tout aussi bien choisir $\eta_\varepsilon>\left[\frac{3}{\varepsilon}-2\right]+1$, et cela fera l'affaire)

2- $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{9}=1$.

Comme précédemment, Soit $\varepsilon>0$ quelconque, on cherche à avoir $|\sqrt[n]{9}-1|<\varepsilon$ pour $n\geq\eta_\varepsilon$

$|\sqrt[n]{9}-1|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\sqrt[n]{9}-1<\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{9}-1<\varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{9}<1+\varepsilon$

$\Rightarrow 9^{1/n}<1+\varepsilon \Rightarrow \ln(9^{1/n})<\ln(1+\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n}\ln 9<\ln(1+\varepsilon)$

$\Rightarrow \frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 9}$ (il faut observer que $\ln 9>0$ car $9>1$)

$\Rightarrow n>\frac{\ln 9}{\ln(1+\varepsilon)}$ il suffit de prendre (par exemple) $\eta_\varepsilon=\left[\frac{\ln 9}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$.

3- $q>0$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$

- si $q=1 \Rightarrow q^n=1$ suite constante et sa limite est 1.
- si $q>1$ $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$; $\forall A>0, \exists \eta_A\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq\eta_A \Rightarrow u_n>A)$

Soit $A>0$ quelconque $u_n>A \Rightarrow q^n>A \Rightarrow \ln q^n>\ln A \Rightarrow n>\frac{\ln A}{\ln q}$ $\left(\begin{matrix}q>1\\ \ln q>0\end{matrix}\right)$

il suffit de prendre $\eta_A=\left[\frac{\ln A}{\ln q}\right]+1$.

- si $0<q<1$, $q=\frac{1}{q'}$ avec $q'>1 \Rightarrow q^n=\frac{1}{q'^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{q'^n}=0$

d'après le cas précédent.

<u>Remarque</u> si $q=0$, $q^n=0$, $\lim_{n\to+\infty}q^n=0$.

EXERCICE 2 :

1°/ $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $\left\langle \begin{array}{l} u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \longrightarrow 1. \\ u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \longrightarrow -1 \end{array} \right.$ $(u_n)_n$ n'a pas de limite.

2°/ $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. $(-1)^n$ bornée $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

ou bien $0 \swarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3°/ $u_n = \frac{n \sin(n!)}{n^2+1}$ $\sin(n!)$ bornée, $\frac{n}{n^2+1} \longrightarrow 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

4°/ $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$

(forme indéterminée $\infty - \infty$)

5°/ $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \frac{(2/3)^{n+1}+1}{(2/3)^n+1} = 3$ $\left(\begin{array}{l} q^n \text{ si } 0<q<1 \quad q^n \to 0 \\ 2/3 < 1 \Rightarrow (2/3)^n \longrightarrow 0 \end{array}\right)$

6/ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^n$ (ceci est aussi une forme indéterminée 1^∞, Attention !).

$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+5/n}{1+3/n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+5/n)^n}{(1+3/n)^n} = \frac{e^5}{e^3} = e^2.$

EXERCICE 3 :

1- $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$; par identification

$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ ainsi $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

2. $u_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}) + (\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}) + (\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}) + \dots + (\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1})$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$ ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 4 :

$\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \frac{2}{9} \end{cases}$.

1- On montre par récurrence que $\forall n$, $1/3 < u_n < 2/3$.

pour $n=0$ $\quad 1/3 < u_0 = 1/2 < 2/3$

On suppose que $1/3 < u_n < 2/3 \Rightarrow \frac{1}{9} < u_n^2 < 4/9$ (j'attire l'attention sur le fait que cela est possible car $0 < \frac{1}{3} < u_n < 2/3$)

(il faut faire remarquer à l'étudiant par exemple que

$-3 < 2$ mai que $(-3)^2 > 2^2$ $(9 > 4)$)

$$\frac{1}{9} < u_n^2 < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{9} < u_n^2 + \frac{2}{9} < \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \Rightarrow 1/3 < u_{n+1} < 2/3 \text{ cqfd.}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1/3 < u_n < 2/3$.

2- monotonie de $(u_n)_n$

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2/9 - u_n = u_n^2 - u_n + 2/9$ considérons l'équation $x^2 - x + 2/9 = 0$

$\Delta = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$, $\quad x_1 = \frac{1 - 1/3}{2} = 1/3$, $\quad x_2 = \frac{1 + 1/3}{2} = 2/3$,

	$1/3$		$2/3$	
$+$	0	$-$	0	$+$

D'après la première question $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3} \Longrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

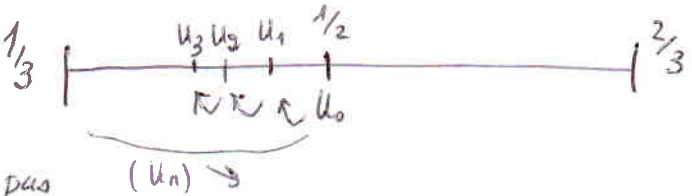
$(u_n)_n$ est (strictement) décroissante (il est possible de le démontrer par récurrence).

3- Comme $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par $1/3$) $(u_n)_n$ est convergente

soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$; alors ℓ vérifie par le fait que $u_{n+1} = u_n^2 + 2/9$

$\ell = \ell^2 + 2/9 \Rightarrow \ell = 1/3$ ou $\ell = 2/3$ (la limite est unique!)

Reprenons depuis le début ; $1/3 < u_n < 2/3$, $(u_n) \searrow$ et $u_0 = 1/2$



Donc la limite ne peut pas être $2/3$ $\quad \ell = 2/3$ rejeté $\longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1/3$.

Exercice 5 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$.

1°/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$; par récurrence

$u_0 = 1 > 0$; On suppose que $u_n > 0$ alors $\dfrac{4u_n}{1+u_n} = u_{n+1} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$.

2°/ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \dfrac{4u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{3u_n - u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$.

on sait que $u_n > 0$, $1+u_n > 0$ reste à étudier le signe de $(3-u_n)$.

$u_0 = 1 < 3$ essayons de montrer par récurrence que $u_n < 3$ $\forall n$.

On suppose que $u_n < 3 \Rightarrow (\underbrace{4u_n - 3u_n}_{u_n}) < 3 \Rightarrow 4u_n < 3 + 3u_n \Rightarrow \underbrace{\dfrac{4u_n}{1+u_n}}_{u_{n+1}} < 3$

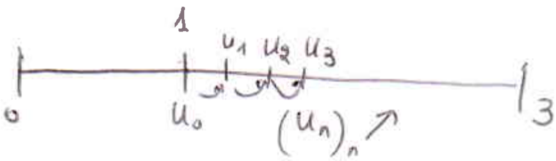
d'où $u_{n+1} < 3$ cqfd. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < 3 \Rightarrow (3-u_n) > 0$.

ainsi $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n} > 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

3°/ $(u_n)_n$ est croissante et majorée (par 3) elle est donc convergente.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et ℓ doit vérifier $\ell = \dfrac{4\ell}{1+\ell} \Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 3$

Rappelons que $(u_n)_n \nearrow$, $0 < u_n < 3$ et $u_0 = 1$



donc $\ell = 0$ rejeté

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Exercice 6 :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ $(u_n)_n \nearrow$ (croissante)

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!} - u_n - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \dfrac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$ $\left(\begin{matrix}\text{dès que} \\ n \geq 1\end{matrix}\right)$

Donc $(v_n)_n \searrow$ (décroissante)

$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$ $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ adjacentes, donc convergentes vers la même limite

Exercice 7 (Supplémentaire)