Université A.B.B. Tlemcen.

Master I.

Année Universitaire 2010-2011.

Spécialité : Systèmes Dynamiques.

Equations fonctionnelles I.

Fiche de T.D. n° 01.

Exercice 1 : Donner l'allure qualitative des solutions des équations différentielles suivantes : 1°/ $\dot{x} = x^3 - x$; 2°/ $\dot{x} = x \ln x$

3°/ $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$ 4°/ $\dot{x} = \sin x \cos x$ (on se limitera à $x_0 \in [-2\pi, 2\pi]$).

Exercice 2 : On considère des équations du type : $\frac{dN}{dt} = Ng(N)$.
Où $N(t)$ est une densité de population et $g(N)$ le taux de croissance (intrinsèque) de la population. 1°/ Si N^* est un point d'équilibre non nul, sous quelle condition(s) est-il stable ?

2°/ Etudier la stabilité des points d'équilibre non triviaux dans chaque cas : a/ $g(N) = r(1 - \frac{N}{K})$ (Logistique) b°/ $g(N) = -k \ln N$ (Gompertz)

c/ $g(N) = \frac{r}{\alpha + N}$ (Berverton-Holt) d/ $g(N) = re^{-\beta N}$ (Ricker).

Exercice 3 : I/ Soit l'équation : $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - Q$.

1°/ Donner une interprétation biologique de cette équation.

2°/ Faire l'étude de ce modèle.

II/ On considère à présent l'équation : $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - QN$.

1°/ Donner une interprétation.

2°/ Rechercher les points d'équilibre, et Etudier leur stabilité.

3°/ Vérifier que cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation logistique. Les résultats obtenus sont-ils cohérents ?

Exercice 4: Soit le modèle suivant décrivant la croissance d'une population d'effectif $N(t)$: $\frac{dN}{dt} = rN(K-N)(N-M)$.

où r est un taux de croissance, $0 < M < K$.

1°/ Etudier la nature de points d'équilibre.

2°/ Donner l'allure qualitative des solutions

3°/ Donner une interprétation biologique des solutions

Exercice 5: On modélise l'évolution d'une biomasse végétale consommée par des herbivores comme suit : $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{aPH}{b+P}$.

P : biomasse végétale ; H : densité des herbivores (H supposée constante).

a, b, K, r sont supposés positifs tels que : $aH > br$ et $K > b$.

1°/ Donner une interprétation biologique du modèle.

2°/ Etudier la stabilité des points d'équilibre.

3°/ Dressez l'ensemble des chroniques selon les valeurs du paramètres

4°/ On se place dans le cas où il y'a 3 points d'équilibre :

a/ Que se passe-t-il si $P(t_0) = P_0 = \frac{K-b}{2}$

b/ Quelle est la plus petite valeur d'herbivore $\overline{H}$ conduisant à l'extinction certaine de la biomasse végétale.

c/ Partant des conditions $P_0 = \frac{K-b}{2}$; on augmente l'herbivore jusqu'à $H > \overline{H}$ (ainsi la biomasse végétale disparaît) l'herbe repoussera-t-elle si l'herbivore est réduit jusqu'à atteindre $H < \overline{H}$