Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2019-2020
Master I
Probabilités-Statistiques II

Examen Final

Exercice 1 : (10 pts)

Soit le tableau suivant :

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$Y = y_i$	17	18	13	9	6

1. Calculer le coefficient de corrélation ρ. Que pouvez-vous en conclure ?
2. Donner l'équation de la droite de régression de Y en X.

Exercice2 : (10pts)

Une machine fabrique des pièces en grand nombre. On effectue un contrôle en prélevant 100 échantillons aléatoires de 30 pièces chacun. On obtient le tableau suivant :

Nombre de pièces défectueuses x_i par lot	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de lots correspondants n_i	4	15	24	23	17	9	6	2

En utilisant un test du χ^2 (khi deux), au seuil de signification $\alpha = 5\% = 0.05$ dire si l'on peut ajuster la répartition donnée par une loi Binomiale $B(30\ ;\ \ 0,1)$.

Examen Proba-Stat

M1. GI 2020.

Corrigé type.

Exercice 1:

X	1	2	3	4	5
Y	17	18	13	9	6

1/ $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \ \sigma_Y}$.

$\bar{X} = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$; $\bar{Y} = \frac{1}{5}(17+18+13+9+6) = 12{,}6$

$Cov(X,Y) = \frac{1}{5}(1\times17+2\times18+3\times13+4\times9+5\times6) - 3\times 12{,}6 = -6{,}2.$ 2pts

$V(X) = \frac{1}{5}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) - 3^2 = 2 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{2} = 1{,}4142$

$V(Y) = \frac{1}{5}(17^2+18^2+13^2+9^2+6^2) - (12{,}6)^2 = 21{,}04 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{21{,}04} = 4{,}587$

$\rho = \dfrac{-6{,}2}{1{,}4142 \times 4{,}587} = -0{,}956.$ 2pts

Comme $\rho \simeq -1$ on peut conclure que Y et X sont en corrélation linéaire et comme $\rho < 0$ la droite de régression est à pente négative $\searrow$. 1pt

2/ $Y = aX + b$.

$a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{-6{,}2}{2} = -3{,}1.$ 2pts

$b = \bar{Y} - a\bar{X} = 12{,}6 + 3{,}1\times3 = 21{,}9.$ 2pts

$Y = -3{,}1\,X + 21{,}9.$ 1pt

Exercice 2 : $N = 100$.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	15	24	23	17	9	6	2

Ajustement par une loi binômiale $B(30,\ 0,1)$.

Les probabilités théoriques sont données par la formule.

$$P(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = C_{30}^k (0,1)^k (0,9)^{30-k}$$

avec $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. On résume les résultats obtenus dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	4	15	24	23	17	9	6	2
$p_i = P(X=x_i)$	0,0424	0,1413	0,2277	0,2361	0,1771	0,1023	0,0474	0,018
$Np_i = 100p_i$	4,24	14,13	22,77	23,61	17,71	10,23	4,74	1,8

2pts

La condition $Np_i > 5$ n'étant pas vérifiée on doit regrouper les classes concernées. On obtient le tableau : 1pt

x_i	0 ou 1	2	3	4	5	6 ou 7
n_i	19	24	23	17	9	8
$p_i = P(X=x_i)$	0,1837	0,2277	0,2361	0,1771	0,1023	0,0654
$Np_i = 100p_i$	18,37	22,77	23,61	17,71	10,23	6,54

2pts

$$\chi^2_{Cal} = \sum \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} = \frac{(19-18,37)^2}{18,37} + \frac{(24-22,77)^2}{22,77} + \dots + \frac{(8-6,54)^2}{6,54} = 0,606$$ 2pts

$d.d.l = 6 - 1 = 5$ (on n'a rien estimé) $\alpha = 0,05$.

$\chi^2_{tabb} = 11,07$ Donc $\chi^2_{Cal} = 0,606 < \chi^2_{tabb} = 11,07$. 2pts

On peut supposer raisonnablement que les données observées suivent une loi Binomiale $B(30,\ 0,1)$ au seuil de signification $\alpha = 0,05$. 1pt