Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2020-2021
Master I
Probabilités-Statistiques I

Examen Final

Exercice1 : 08 pts

Soit α un paramètre réel strictement positif, on considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|x|^3} & si\ |x| \geq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Trouver α pour que f soit la d.d.p d'une Variable Aléatoire X.
2. Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X).

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 158 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 163 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 160 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 20% des femmes les plus petites, et la taille minimale des 25% des femmes les plus grandes.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 175 centimètres et d'écart-type 9 centimètres. Les femmes représentent 52% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 163 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 163 cm soit une femme ?

Probabilités - Statistiques M1 . S1 (2020-2021)

Corrigé - type Examen final.

Exercice 1 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Pour que f soit une d.d.p $\alpha > 0$ pour que $f \geq 0$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-1} -\frac{\alpha}{x^3}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3}\,dx = 1.$

$$\Rightarrow -\alpha\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{-\infty}^{-1} + \alpha\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_{1}^{+\infty} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 \qquad \text{Donc } \boxed{\alpha = 1}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^3} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

02pts

2. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{x}\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{+\infty} = -1 + 1 = 0.$$

$$\boxed{E(X) = 0}$$

03pts

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) \qquad (E(X) = 0).$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

la dernière intégrale diverge, Donc $V(X)$ n'existe pas.

03pts

Exercice 2 : $X \rightsquigarrow N(158,\ 6)$

1. $P(X \geqslant 163) = P\left(\frac{X-158}{6} \geqslant \frac{163-158}{6}\right) = P\left(\frac{X-158}{6} \geqslant \frac{5}{6}\right)$

$$= 1 - P\left(\frac{X-158}{6} \leqslant \frac{5}{6}\right) = 1 - F(0{,}833)$$

$$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

$\boxed{P(X \geqslant 163) = 0{,}2033}$ 02pts

2. $P(150 \leqslant X \leqslant 160) = P\left(\frac{-8}{6} \leqslant \frac{X-158}{6} \leqslant \frac{2}{6}\right)$

$$= F(0{,}33) - F(-1{,}33) = F(0{,}33) - (1 - F(1{,}33))$$

$$= F(1{,}33) + F(0{,}33) - 1.$$

$$= 0{,}9082 + 0{,}6293 - 1. = 0{,}5375$$

$\boxed{P(150 \leqslant X \leqslant 160) = 0{,}5375}$ 02pts

3. $P(X \leqslant t) = 0{,}2 \iff P\left(\frac{X-158}{6} \leqslant \frac{t-158}{6}\right) = 0{,}2$ négatif $0{,}2 < 0{,}5$

$$\iff 1 - P\left(\frac{X-158}{6} \leqslant \frac{158-t}{6}\right) = 0{,}2$$

$$\iff F\left(\frac{158-t}{6}\right) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Lecture inversée de la table de la loi $N(0,1)$ donne :

$\frac{158-t}{6} = 0{,}84$ (on acceptera aussi $0{,}85$) 02pts

Donc $\boxed{t \simeq 152{,}96 \simeq 153}$

$P(X \geqslant t) = 0{,}25 \iff 1 - P\left(\frac{X-158}{6} \leqslant \frac{t-158}{6}\right) = 0{,}25$

$$\iff F\left(\frac{t-158}{6}\right) = 0{,}75$$

lecture inversée de la table de la loi $N(0,1)$ donne :

$\frac{t-158}{6} = 0{,}68$ 02pts

Donc $\boxed{t = 162{,}08 \simeq 162{,}08}$ (on acceptera 161 et 162)

II. Notons A = La personne mesure plus de 163 cm

H = La personne choisie est un homme

F = " " " une femme

1. La formule des probabilité totales donne :

$$P(A) = P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H)$$

$$P(A/H) = P(Y \geq 163) = 1 - P(Y \leq 163) = 1 - P\left(\frac{Y-175}{9} \leq \frac{163-175}{9}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-175}{9} \leq -1{,}33\right) = P\left(\frac{Y-175}{9} \leq 1{,}33\right)$$

$$= 0{,}9082$$

$$P(A) = 0{,}2033 \times 0{,}52 + 0{,}9082 \times 0{,}48 = 0{,}1057 + 0{,}4359$$

$$\boxed{P(A) = 0{,}5416}$$

02pts

2. $$P(F/A) = \frac{P(A/F).P(F)}{P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H)}$$ (Formule de Bayes)

$$= \frac{P(A/F).P(F)}{P(A)}$$

$$= \frac{0{,}1057}{0{,}5416} = 0{,}1951.$$

$$\boxed{P(F/A) = 0{,}1951}$$

02pts