Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
Master I
Probabilités-Statistiques

Examen Final

Exercice1 : (10pts)

Le tableau suivant donne les prix Y en milliers de dinars, d'une nuitée pour une chambre standard dans un hôtel à Doha (Qatar), et le nombre d'étoiles X correspondant à chaque hôtel:

X \ Y	$0\leq Y<5$	$5\leq Y<10$	$10\leq Y<15$	$15\leq Y<20$
0	13	10	0	0
1	2	15	1	0
2	0	2	14	0
3	0	0	12	15
4	0	0	2	14

1. Donner les lois marginales de X et de Y, et calculer les moyennes et les variances de X et de Y.
2. Calculer Cov(X,Y).
3. Calculer le coefficient de corrélation entre Y et X. Que pouvez-vous conclure ?
4. Selon cette étude, quel devrait être le prix moyen d'une nuitée d'un hôtel 5 étoiles ?
5. Soit X est une variable statistique donnée et Y=aX+b.

Rappeler alors la formule de la moyenne de Y en fonction de celle de X ainsi que la variance de Y en fonction de celle de X. Appliquer ces formules aux questions précédentes et commenter les résultats.

Exercice2 : (10 pts)

Une machine fabrique des pièces en grand nombre. On effectue un contrôle en prélevant 100 échantillons aléatoires de 30 pièces chacun. On obtient le tableau suivant :

Nombre de pièces défectueuses x_i par lot	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de lots correspondants n_i	4	15	24	23	17	9	6	2

1. En utilisant un test du χ^2(khi deux), au seuil de signification $\alpha = 5\% = 0.05$ dire si l'on peut ajuster la répartition donnée par une loi Binomiale $B(30\,;\ 0,1)$.
2. En utilisant un test du χ^2(khi deux), au seuil de signification $\alpha = 5\% = 0.05$ dire si l'on peut ajuster la répartition donnée par une loi de Poisson $P(\lambda)$.
3. Commenter les résultats obtenus

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
Master I
Probabilités-Statistiques

Corrigé Examen Final

Exercice1 : Commençons par observer que N=100, ce qui donne la loi

X \ Y	2,5	7,5	12,5	17,5	
0	0,13	0,10	0	0	0,23
1	0,02	0,15	0,01	0	0,18
2	0	0,02	0,14	0	0,16
3	0	0	0,12	0,15	0,27
4	0	0	0,02	0,14	0,16
	0,15	0,27	0,29	0,29	

1. Les lois marginales sont données par les tableaux :

X	0	1	2	3	4
fi.	0,23	0,18	0,16	0,27	0,16

Y	2,5	7,5	12,5	17,5
f.j	0,15	0,27	0,29	0,29

1pt

Et par suite

$\overline{X}$= 1,95 et Var(X)=2,0075

$\overline{Y}$=11,1 et Var(Y)=27,04

1pt

2. Cov(X,Y)=6,63 — 2pts
3. ρ=0,899953≈0,9 — 2pts

Comme ρ ≈ 0,9 qui est "proche" de 1, on peut légitimement penser qu'il y a bien corrélation linéaire entre Y et X.

4. L'équation de la droite de régression de Y en X est donnée par :

   Y=3,3X+4,66

   Ainsi pour un hôtel 5 étoiles X=5 le prix moyen d'une nuitée devrait être

   Y=3,3x5+4,66=21,16=21 160 Dinars.

   2pts

5. $\overline{Y} = a\overline{X} + b$, si on applique cette formule à notre exercice on obtient $\overline{Y}$=3,3x1,95+4,66=11,095

   Var(Y)=a^2Var(X), si on applique cette formule à notre exercice on obtient Var(Y)=$3,3^2$x2,0075=21,86

   Il est normal de ne pas retrouver les valeurs exactes de $\overline{Y}$ et Var(Y) car ici la relation Y=aX+b obtenue par l'équation de la droite de régression n'est qu'approximative et pas une relation exacte.

2pts

Exercice2 :

1. *Ici N=100*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i *Effectifs Observés*	4	15	24	23	17	9	6	2
p_i théoriques	0,0424	0,1413	0,2277	0,2361	0,1771	0,1023	0,0474	0,018
Np_i=100p_i Effectifs théoriques	4,24	14,13	22,77	23,61	17,71	10,23	4,74	1,8

2pts

La condition Np_i>5 n'étant pas vérifiée on doit regrouper des classes on obtient ainsi le nouveau tableau

x_i	0 ou 1	2	3	4	5	6 ou 7
n_i *Effectifs Observés*	19	24	23	17	9	8
p_i théoriques	0,1837	0,2277	0,2361	0,1771	0,1023	0,0654
Np_i=100p_i Effectifs théoriques	18,37	22,77	23,61	17,71	10,23	6,54

1pt

χ^2_{cal} =0,606

dl=6-1=5 et $\alpha = 5\% = 0.05$ *de la table on obtient* χ^2_{thque} =11,07

1pt

On accepte l'ajustement des données observées par une loi binomiale $B(30\,;\ \ 0,1)$ *au seuil de signification* $\alpha = 5\% = 0.05$.

2. *P(λ) une bonne façon d'estimer λ, et de prendre* $\lambda = \bar{X}$

Dans notre exemple $\bar{X} = 2,95$ *on prendra donc* $\lambda = 2,95$ *(on acceptera aussi* $\lambda = 3$*) et on obtient le tableau*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i *Effectifs Observés*	4	15	24	23	17	9	6	2
p_i théoriques	0.0523	0.1544	0.2277	0.2239	0.1652	0.0974	0.0479	0.0202
Np_i=100p_i Effectifs théoriques	5,23	15,44	22,77	22,39	16,52	9,74	4,79	2,02

2pts

La condition Np_i>5 n'étant pas vérifiée on doit regrouper des classes on obtient ainsi le nouveau tableau

x_i	0	1	2	3	4	5	6 ou7
n_i *Effectifs Observés*	4	15	24	23	17	9	8
p_i théoriques	0.0523	0.1544	0.2277	0.2239	0.1652	0.0974	0.0681
Np_i=100p_i Effectifs théoriques	5,23	15,44	22,77	22,39	16,52	9,74	6,81

1pt

χ^2_{cal} =0,663

dl= 7-1-1=5 et $\alpha = 5\% = 0.05$ *de la table on obtient* χ^2_{thque} =11,07

1pt

On accepte l'ajustement des données observées par une loi de Poisson P($2,95$*) au seuil de signification* $\alpha = 5\% = 0.05$.

3. *D'un coté le phénomène aléatoire présenté peut complètement être décrit par une loi binomiale. D'un autre côté on sait que l'on peut approximer une loi binomiale par une loi de Poisson sous certaines conditions, il est donc tout à fait cohérent qu'une même distribution puisse être ajustée à la fois par une loi binomiale et une loi de Poisson.*

2pts