Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2020-2021
1ère Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (12 pts)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des paramètres réels non nuls.

1. Pour quelle(s) valeur(s) des paramètres a, b et c; la matrice M est-elle inversible ?
2. Lorsque cela est possible calculer M^{-1}
3. Déduire de ce qui précède la solution du système

$$\begin{cases} x + 9y + 3z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice2 : (08 pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2$

$$A^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I$$

2. Sans calculer le déterminant de A et sans calculer la comatrice de A, donner l'expression exacte de A^{-1}.

Corrigé type

Examen final algèbre (2020-2021).

Exercice 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

1°/ $\det M = (bc^2 - cb^2) - a(c^2 - b^2) + a^2(c-b)$

$= bc(c-b) - a(c-b)(c+b) + a^2(c-b)$

$= (c-b)[bc - ac - ab + a^2]$

$= (c-b)[c(b-a) - a(b-a)]$

$= (c-b)(b-a)(c-a)$

4 pts

M est inversible $\Longleftrightarrow$ $c \neq b$ et $b \neq a$ et $c \neq a$.

2°/ Si $c \neq b$ et $b \neq a$ et $c \neq a$ $\quad \det M = (c-b)(b-a)(c-a) \neq 0$.

$$Com(M) = \begin{pmatrix} bc(c-b) & -(c-b)(c+b) & (c-b) \\ -ac(c-a) & (c-a)(c+a) & -(c-a) \\ ab(b-a) & -(b-a)(b+a) & b-a \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, {}^t Com(A) = \frac{1}{(c-b)(b-a)(c-a)} \begin{pmatrix} bc(c-b) & -ac(c-a) & ab(b-a) \\ -(c-b)(c+b) & (c-a)(c+a) & -(b-a)(b+a) \\ (c-b) & -(c-a) & b-a \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{bc}{(b-a)(c-a)} & \dfrac{-ac}{(c-b)(b-a)} & \dfrac{ab}{(c-b)(c-a)} \\ \dfrac{-(c+b)}{(b-a)(c-a)} & \dfrac{c+a}{(c-b)(b-a)} & -\dfrac{b+a}{(c-b)(c-a)} \\ \dfrac{1}{(b-a)(c-a)} & -\dfrac{1}{(c-b)(b-a)} & \dfrac{1}{(c-b)(c-a)} \end{pmatrix}$$

4 pts

3°/ $\begin{cases} x+9y+3z=3 \\ x+y-z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3z+9y=3 \\ x-z+y=2 \\ x+z+y=1. \end{cases}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 1pt

il suffit alors de prendre : $a=3$, $b=-1$, $c=1$ et remplacer dans la question précédente dans M^{-1} et on obtient : 1,5 pt

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 & 3/4 \\ 0 & -\frac{4}{8} & 2/4 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve : $x = -3/8 + 6/8 + 3/4 = \frac{9}{8}$. 0,5 pt

$z = -1 + \frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = -\frac{4}{8}$ 0,5 pt

$y = 3/8 + 2/8 - 2/8 = \frac{3}{8}$. 0,5 pt

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ Par récurrence montrons que $\forall n \geq 2$

$$A^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I.$$

Pour $n = 2$ $\quad A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3} \times 15A + \frac{1}{3}(-12)I = 5A - 4I = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On a bien la formule vérifiée pour $n = 2$

1pt

$$A^2 = 5A - 4I.$$

On suppose que $\quad A^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I \quad$ (HR)

Il faut montrer que : $\quad A^{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^{n+1})I.$

Or $\quad A^{n+1} = A^n A = \left[\frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I\right]A \quad$ (HR)

$$A^{n+1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)A^2 + \frac{1}{3}(4 - 4^n)A.$$

$$A^{n+1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)[5A - 4I] + \frac{1}{3}(4 - 4^n)A \quad \text{(Déjà calculé précédemment)}$$

$$A^{n+1} = \left[\frac{1}{3}(4^n - 1) \times 5 + \frac{1}{3}(4 - 4^n)\right]A + \frac{1}{3}(4^n - 1)(-4)I.$$

$$A^{n+1} = \frac{1}{3}(5 \times 4^n - 5 + 4 - 4^n)A + \frac{1}{3}(4 - 4^{n+1})I.$$

$$A^{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^{n+1})I \quad \text{cqfd}$$

4pts

La formule est démontrée $\forall n \geq 2$.

2/ On a montré que : $\quad A^2 = 5A - 4I$

$$A^2 - 5A = -4I \iff -\frac{1}{4}(A^2 - 5A) = I \iff A\left[-\frac{1}{4}(A - 5I)\right] = I$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I) = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

03pts