

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPLEXES

présenté par

SOUNA Fethi

ETUDE MATHÉMATIQUE DU GRÉGARISME EN ÉCOLOGIE

Mémoire soutenu le 04 Juin 2016 devant le jury composé de :

M. MOUSSAOUI. A.	Pr. Université de Tlemccen	(Président)
M. ABDELLAOUI. B	Pr. Université de Tlemccen	(Examineur)
M. TOUAOULA. M. T.	Pr. Université de Tlemccen	(Examineur)
M. MIRI. S. E-H.	M.C.A. Université de Tlemccen	(Encadreur)

DÉDICACES

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

Mes frères Mohammed el Amine et Zinedine

A tous les membres de ma famille, petits et grands

A mes chers amis Ahmed Menacer et Soufyane Boukhatem qui m'ont beaucoup aidé durant ces années d'études

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

REMERCIEMENTS

JE tiens à témoigner ma reconnaissance à Dieu tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce mémoire. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur MIRI Sofiane El-Hadi, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigué tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur Moussaoui.A, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées. Je vous remercie très chaleureusement de m'avoir continuellement encouragé, pour votre soutien scientifique et humain, pour votre gentillesse et votre hospitalité. aussi je vous remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury qui examinera ce mémoire.

Je remercie Monsieur le Professeur Abdellaoui. B, d'avoir accepté de faire partie du jury mais aussi en sa qualité de Directeur du Laboratoire d'Analyse Non Linéaire et Mathématique Appliquées, pour avoir mis à notre disposition tous les moyens du laboratoire pour réaliser ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur TOUAOULA. M.T, pour sa contribution à ma formation et en acceptant de juger et évaluer mon travail. Je tiens à vous remercie pour tout, car vous m'avez appris beaucoup plus que les mathématiques.

J'exprime également ma gratitude à monsieur le chef de département Monsieur MEBKHOUT Miloud qui a été toujours disponible pour nous, et nous a vraiment aidé dans tous les domaines. Enfin, je ne saurai oublier

de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques,
qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de for-
mation.

Tlemcen, Juin 2016.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	ix
1 INTRODUCTION	1
1.1 LE THÉORÈME DE POINCARÉ-BENDIXSON	1
1.2 SYSTÈME CONSERVATIFS, INTÉGRALE PREMIÈRE	3
1.3 LA BIFURCATION	3
1.3.1 Un exemple de bifurcation transcritique	4
1.3.2 Un exemple de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf	4
1.3.3 Théorème de bifurcation de Hopf	6
1.3.4 Indice de Marsden MacCraken	8
1.4 CRITÈRE DE ROUTH-HURWITZ	9
1.5 RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES	12
2 MODÈLES DE BASE DE DEUX POPULATIONS EN INTERACTION	15
2.1 MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA ET CROISSANCE LINÉAIRE . . .	15
2.1.1 Recherche des points d'équilibre	16
2.1.2 Etude de la stabilité des points d'équilibre	17
2.2 MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA ET CROISSANCE LOGISTIQUE . .	19
2.2.1 Les isoclines zéros	20
2.2.2 Recherche des états d'équilibre	20
2.2.3 la stabilité des points d'équilibre	20
2.3 MODÈLE CLASSIQUE DE MUTUALISME INTERSPÉCIFIQUE . . .	22
2.3.1 Les isoclines zéros	23
2.3.2 Recherche des états d'équilibre	24
2.3.3 Etude de la stabilité des points d'équilibre	24
2.3.4 Interprétation biologique	26
2.4 MODÈLE CLASSIQUE DE COMPÉTITION INTERSPÉCIFIQUE . . .	27

2.4.1	Les isoclines zéros	27
2.4.2	Recherche des états d'équilibre	28
2.4.3	Etude de la stabilité des points d'équilibres	29
2.4.4	Interprétation biologique des résultats	31
3	MODÉLISATION DU COMPORTEMENT GRÉGAIRE DANS DES SYSTÈMES DE POPULATION	35
3.1	LE NOUVEAU MODÈLE SYMBIOTIQUE	35
3.1.1	La simplification du modèle	36
3.1.2	Les isoclines zéros	38
3.1.3	Les points d'équilibre	38
3.1.4	La stabilité des points d'équilibre	39
3.1.5	Mutualisme obligé pour la population solitaire	43
3.2	MODÈLE DE COMPÉTITION	46
3.2.1	Les isoclines zéros	47
3.2.2	Les points d'équilibre	48
3.2.3	Étude de la stabilité des points d'équilibre	50
3.3	LE MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR	54
3.3.1	Les isoclines zéros	55
3.3.2	Les points d'équilibre	56
3.3.3	La stabilité locale des points d'équilibre	56
3.3.4	Le comportement du système en termes de ρ	58
3.4	CONCLUSION	74
4	MODÈLE ÉCO-ÉPIDÉMIOLOGIQUE AVEC UN COMPORTEMENT GRÉGAIRE	79
4.1	L'ÉPIDÉMIE EST INOFFENSIVE POUR LES PRÉDATEURS	79
4.1.1	Équilibres et leur analyse	81
4.2	AUCUNE PRÉDATION SUR LA PROIE INFECTÉE	85
4.3	L'ÉPIDÉMIE EST TOXIQUE POUR LES PRÉDATEURS	87
4.3.1	Équilibres et leur analyse	88
4.3.2	Analyse de la bifurcation	91
4.4	CONCLUSION	98
	BIBLIOGRAPHIE	101

INTRODUCTION

Ce mémoire de Master a pour but, de faire une étude comparative entre les modèles écologiques classiques, et les modèles écologiques représentant des populations ayant recours à un mode de vie grégaire. Ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats, mais il présente en détails, quelques résultats obtenus ces dernières années par différents auteurs, dans des travaux présentés en bibliographie.

Dans cette brève introduction, nous allons présenter quelques outils et théorèmes, qui nous seront utiles tout au long du présent mémoire, la plupart des notions ont été étudiées en cours de Master I et II, et sont présents dans la plupart des ouvrages traitant des systèmes dynamiques, à titre d'exemple, nous invitons le lecteur à consulter [2], [4] et [6].

1.1 LE THÉORÈME DE POINCARÉ-BENDIXSON

Le théorème de Poincaré-Bendixson est un outil très important dans l'étude des systèmes dynamiques, il est énoncé par Henri Poincaré et la preuve est finalement complétée par Ivar Bendixson en 1901. Grâce à ce théorème et sous des hypothèses nous pouvons assurer l'existence d'un **cycle limite**, mais avant d'énoncer le théorème nous avons besoin de donner quelques définitions.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où f et g sont différentiables et de différentielles continues sur \mathbb{R}^2 , $t \in [0, +\infty[$.

Définition 1.1. Domaine positivement invariant Un domaine D du plan associé au système (1.1) est dit positivement invariant si quelle que soit la condition initiale $(x_0, y_0) \in D$, la trajectoire correspondante reste dans D lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 1.2. Domaine attractant du plan On appelle domaine attractant une région D du plan, bornée et compacte telle que toute trajectoire partant du bord ∂D de D entre dans l'intérieur de D .

Définition 1.3. ω -limite Soit p_0 un point du domaine de définition du système (1.1). On appelle ω -limite de p_0 , l'ensemble suivant :

$$\omega(p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \overline{\{x(s, p_0), y(s, p_0), s \geq t\}}$$

Définition 1.4. Un cycle limite Un cycle limite est une trajectoire fermée isolée, au moins d'un côté.

Théorème 1.1. Théorème de Poincaré-Bendixson Si D est un domaine borné attractant du plan, toute trajectoire de D admet comme ω -limite :

- * Soit un point d'équilibre ;
- * Soit une orbite périodique ;
- * Soit un ensemble constitué de la réunion de points d'équilibre et d'orbites régulières qui les joignent (hétéroclines ou homoclines).

Le théorème affirme donc que toute trajectoire du plan « attrappée » par un ensemble attractant ne peut faire que deux choses, ou bien tendre vers un ensemble contenant au moins un équilibre, ou bien vers une orbite périodique.

Proposition. Critère négatif de Bendixson Soit un système dynamique donné de type (1.1). Soit D une région simplement connexe, c'est-à-dire « sans trou ». Si la quantité $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ est de signe constant sur D , il n'existe pas de cycle limite entièrement contenu dans D .

Proposition. Critère négatif de Dulac Soit un système dynamique donné de type (1.1). Soit D une région simplement connexe. Soit $B(x, y)$ une fonction continue et différentiable sur D , si la quantité $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$ est de signe constant sur D , il n'existe pas de cycle limite entièrement contenu dans D .

exemple

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y = g(x, y) \end{cases}$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha + \delta$ qui est de signe constant pour tout point du plan. Par application du critère négatif de Bendixson il ne peut donc pas exister de cycle limite pour un système linéaire.

1.2 SYSTÈME CONSERVATIFS, INTÉGRALE PREMIÈRE

Définition 1.5. Intégrale première Une fonction $H(x, y)$ est dite *intégrale première* d'un système dynamique de type (1.1) sur un domaine D du plan si $H(x(t), y(t))$ est constante pour toute solution $(x(t), y(t))$ du système dynamique.

Lorsqu'une intégrale première existe, elle n'est pas unique. Si $H(x(t), y(t))$ est intégrale première, alors $H(x(t), y(t)) + \gamma$ ou bien $\gamma H(x(t), y(t))$ sont également intégrales premières, avec γ réel. Le fait que $H(x(t), y(t))$ soit intégrale première implique qu'elle vérifie la relation suivante :

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y} g(x, y) = 0$$

Définition 1.6. Système conservatif Un système dynamique qui admet un intégrale première est dit *conservatif*.

1.3 LA BIFURCATION**la bifurcation en dimension 2**

On dira que nous sommes en présence d'une bifurcation, si un changement qualitatif se produit lorsque l'on fait varier un des paramètres, plus précisément

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), y(t), \gamma) \\ \frac{d}{dt}y(t) = g(x(t), y(t), \gamma) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec, γ un paramètre réel.

Définition 1.7. On dira qu'il y a bifurcation pour le système (1.2) en γ^* , si en une valeur γ arbitraire "proche" de γ^* il existe un dynamique qualitativement différente de celle en γ^* , autrement dit, lorsque le paramètre γ traverse la valeur critique γ^* nous avons donc un changement ou bien dans le nombre des points d'équilibre ou bien dans leurs stabilités, on parle ici de la bifurcation locale.

Pour plus de détails sur ce sujet nous invitons le lecteur à consulter [2], nous n'allons présenter que deux types de bifurcations que l'on rencontre plus loin dans ce mémoire.

1.3.1 Un exemple de bifurcation transcritique

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \mu x(t) - x^2(t) & x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}y(t) = -y(t) & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont $(0, 0)$, $(\mu, 0)$.

1 Si $\mu > 0 \Rightarrow (0, 0)$ est instable, $(\mu, 0)$ est stable.

2 Si $\mu < 0 \Rightarrow (0, 0)$ est stable, $(\mu, 0)$ est instable.

Cet exemple n'est pas anodin, il est en fait le représentant de la bifurcation transcritique, il en est même la forme normale.

1.3.2 Un exemple de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf

Soit le système d'équation différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = y(t) + x(t)(\mu - x^2(t) - y^2(t)) & \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}y(t) = -x(t) + y(t)(\mu - x^2(t) - y^2(t)) \end{cases}$$

Ce système admet un unique point d'équilibre, l'origine $(0,0)$, pour toute valeur de μ .

Pour étudier la dynamique de ce système il est très utile de réécrire ce système en coordonnées polaires.

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} r' = r(\mu - r^2) = f(r) \\ \theta' = -1 \end{cases}$$

$$f'(r) = \mu - 3r^2$$

Il existe trois cas possibles selon le signe du paramètre μ .

1 $\mu < 0$

L'origine est l'unique point d'équilibre telle que $f'(0) = \mu < 0 \Rightarrow (0,0)$ est un foyer stable.

2 $\mu = 0$

Dans ce cas nous avons $r' = -r^3 < 0$ donc, l'origine est encore un foyer stable.

3 $\mu > 0$

$f(r) = 0 \Rightarrow r = 0$ où $r = \sqrt{\mu}$ telle que :

$f'(0) = \mu > 0 \Rightarrow (0,0)$ est un foyer instable

$f'(\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0 \Rightarrow r = \sqrt{\mu}$ est stable est correspond à une trajectoire fermée qui est un cycle limite stable de rayon égale à $\sqrt{\mu}$.

Lorsque le paramètre μ change de signe il apparait un cycle limite stable qui est un cercle centré sur l'origine.

1.3.3 Théorème de bifurcation de Hopf

Bifurcation de Hopf supercritique

Soit le système différentielles sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), y(t), \mu) & \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dt}y(t) = g(x(t), y(t), \mu) \end{cases}$$

Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système pour toute valeur de μ . Soit la partie linéaire du système correspondant à la matrice Jacobienne $A(0,0)$ calculé à l'origine :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

D'une manière générale, on a une bifurcation de Hopf lorsque le déterminant de la partie linéaire est positif et que la trace change de signe en faisant varier le paramètre μ . Soient $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$ les deux valeurs propres de cette Jacobienne :

$$\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$$

Le théorème de Hopf s'énonce ainsi :

Supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :

- 1) la partie réelle des valeurs propres s'annulent pour une valeur μ_c du paramètre, soit $\alpha(\mu_c) = 0$,
- 2) pour $\mu = \mu_c$, la partie imaginaire des valeurs propres est différente de zéro, $\beta(\mu_c) \neq 0$. Cela revient à dire que les valeurs propres sont imaginaires pures.
- 3) Supposons de plus que $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) > 0$.

Alors on peut conclure :

- a) $\mu = \mu_c$ est une valeur de bifurcation du système.

- b) il existe $\mu_1 < \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_1, \mu_c[$ l'origine est un foyer stable.
- c) Pour tout voisinage U de l'origine, il existe $\mu_2 > \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_c, \mu_2[$ l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable contenu dans U .

Si l'on remplace dans le théorème de Hopf la troisième hypothèse par la condition :

3-bis) Supposons de plus que $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) < 0$.

Alors les conclusions deviennent :

- a) $\mu = \mu_c$ est une valeur de bifurcation du système.
- b-bis) il existe $\mu_2 > \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_c, \mu_2[$ l'origine est un foyer stable.
- c-bis) Pour tout voisinage U de l'origine, il existe $\mu_1 < \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_1, \mu_c[$ l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable contenu dans U .

Bifurcation de Hopf souscritique

Dans le cas où l'origine est stable pour $\mu = \mu_c$, alors le cycle limite est stable on parle donc de bifurcation de Hopf supercritique. Ce n'est pas toujours le cas, le cycle limite qui apparaît peut être instable et dans ce cas la bifurcation est dite souscritique, les conclusions du théorème sont modifiées et deux cas peuvent se produire :

Premier cas : Supposons que $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) > 0$, alors on peut conclure :

- a) $\mu = \mu_c$ est une valeur de bifurcation du système.
- b) $\exists \mu_1 < \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_1, \mu_c[$ l'origine est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable.
- c) $\exists \mu_2 > \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_c, \mu_2[$ l'origine est un foyer instable.

Second cas : Supposons que $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}(\mu_c) < 0$, alors on peut conclure :

- a) $\mu = \mu_c$ est une valeur de bifurcation du système.
- b-bis) $\exists \mu_1 < \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_1, \mu_c[$ l'origine est un foyer instable.

c-bis) $\exists \mu_2 > \mu_c$ tel que pour tout $\mu \in [\mu_c, \mu_2[$ l'origine est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable.

1.3.4 Indice de Marsden MacCraken

Dans le cas d'une bifurcation de Hopf le cycle limite peut être stable comme il peut être instable. Une première façon pour démontrer que le cycle limite est stable (respectivement instable) consiste à rechercher une fonction de Lyapunov qui permet de démontrer que l'origine (le point d'équilibre) est asymptotiquement stable (respectivement instable) pour $\mu = \mu_c$. Cependant, il existe une méthode qui permet de conclure à la nature du cycle, en calculant un indice dit de Marsden et MacCraken. Pour cela, on doit procéder avec des étapes successives en partant du système dynamique à la bifurcation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), y(t), \mu_c) \\ \frac{d}{dt}y(t) = g(x(t), y(t), \mu_c) \end{cases}$$

On recherche la partie linéaire du système correspondant à la matrice Jacobienne $A(0,0)$ calculée à l'origine et pour la valeur du paramètre $\mu = \mu_c$:

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)}$$

On doit ensuite rechercher une matrice de changement de bases P qui met la partie linéaire sous la forme de Jordan lorsque $\mu = \mu_c$, c'est à dire sous la forme suivante :

$$P^{-1}A(0,0)P = \begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ -\omega^* & 0 \end{pmatrix}$$

Cette forme de matrice correspondant à des centres avec des valeurs propres complexes et conjuguées, $\lambda_{1,2} = \pm \omega^*$. Il est nécessaire d'effectuer

le changement de base avant de procéder au calcul de l'indice. Le système dynamique s'écrit donc dans la nouvelle base de coordonnées (u, v) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = h(u(t), v(t)) \\ \frac{d}{dt}v(t) = k(u(t), v(t)) \end{cases}$$

Où h et k sont des fonctions des variables u et v de la nouvelle base.

On peut alors calculer un indice I dit de Marsden et MacCraken.

Définition 1.8. Indice de Marsden MacCraken L'indice de Marsden MacCraken est défini par l'expression suivante :

$$I = \omega^* (h_{uuu} + h_{uvv} + K_{uuv} + K_{vvv}) \\ + (h_{uu}K_{uu} - h_{uu}h_{uu} + K_{uu}K_{uv} + K_{uu}K_{uv} - h_{vv}h_{uv} - h_{vv}K_{vv})$$

Où les termes correspondent aux dérivées partielles des fonctions h et k par rapport aux variables u et v , selon les notations suivantes :

$$h_{uvv} = \frac{\partial^3 h}{\partial u \partial^2 v}, K_{uv} = \frac{\partial^2 k}{\partial u \partial v},$$

et ainsi de suite.

Si l'indice est négatif ($I < 0$) alors le cycle limite est stable est la bifurcation est supercritique. Si l'indice est positif ($I > 0$) alors le cycle limite est instable et la bifurcation est souscritique. Si l'indice est nul il est impossible de conclure et d'autres méthodes doivent être utilisées. En particulier si $I = 0$ il est possible que la bifurcation soit dégénérée. Dans ce cas il n'y a pas de cycle limite et il peut exister des centres à la bifurcation.

1.4 CRITÈRE DE ROUTH-HURWITZ

Dans les systèmes dynamique autonome la stabilité d'un point d'équilibre est relativement liés par le signe de la partie réelle des valeurs propres associée au matrice Jacobienne on ce point, pour $n > 2$ la recherche explicite des valeurs propres revient à résoudre des polynôme avec des degrés

très élevée. Cependant, il existe un critère dit de Routh-Hurwitz permettant de conclure à la stabilité locale d'un point d'équilibre sans savoir explicitement les valeurs propres.

Soit le système linéaire de dimension n suivant :

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j,$$

avec $i \in [1, n]$, où $A = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice carrée de dimension n à coefficients constantes. Nous supposons que $\det A \neq 0$, ce qui implique que l'origine est l'unique équilibre. La matrice A admet n valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$, cette dernière est un polynôme de degré n que nous écrivons sous la forme suivante :

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Considérons les n déterminants suivants :

$$H_1 = a_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix},$$

tel que $k \in [1, n]$. Dans le cas de dimension n , tous les a_j avec $j > n$ sont pris égaux à zéros. Nous avons le résultat suivant :

L'équilibre est asymptotiquement stable $\iff \forall k \in [1, n], H_k > 0$.

Dans le cas où $n = 3$, le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

$$H_1 = a_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 - a_3^2 = a_3H_2,$$

donc, les conditions de stabilité en appliquant le critère de Routh-Hurwitz sont :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_3 > 0 \\ a_3 > 0 \end{cases}$$

1.5 RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES

Il s'agit d'une méthode pour estimer le nombre de racines réelles positives d'un polynôme : on compte le nombre c de changements de signe dans la suite des coefficients, en ne tenant pas compte des coefficients nuls. Donc le nombre de racines positives vaut au plus c et si on compte les racines avec leur multiplicité, alors le nombre de racines positives a la même parité que c , c-à-d que ce nombre vaut c ou $c - 2$ ou $c - 4$, etc.

Soit $P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ un polynôme de degré n à coefficients réels. Pour $0 \leq i \leq n$, on pose $\epsilon_i = \text{sgn}(\alpha_i)$ où $\text{sgn}(x) = -1, 0$ ou 1 selon x est strictement négatif, nul ou strictement positif.

On dit qu'il y a un changement de signe dans la suite $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ s'il existe i et j tels que :

$$\epsilon_i = -\epsilon_{i+j} \quad \text{et} \quad \epsilon_{i+1} = \dots = \epsilon_{i+j-1}$$

On note $\sigma(P)$ le nombre de changements de signe dans la suite $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ et $r(P)$ le nombre de racines strictement positives de P (comptées avec leur multiplicité).

Proposition. On a : $r(P) \leq \sigma(P)$.

Exemple

Le polynôme $x^3 + x^2 - x - 1$, admet un seul changement de signes, entre le deuxième et le troisième terme. La règle de Descartes affirme donc qu'il possède exactement une racine positive.

Si l'on transforme x en $-x$, on a $-x^3 + x^2 + x - 1$, qui donne deux changements de signes. Donc il y a 2 ou 0 racines négatives.

MODÈLES DE BASE DE DEUX POPULATIONS EN INTERACTION

Dans ce chapitre on présente les modèles classiques d'interaction entre deux populations, le lecteur avisé peut se passer de la lecture de ce chapitre et aller directement au chapitre suivant. Ce chapitre est largement inspiré de [2].

2.1 MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA ET CROISSANCE LINÉAIRE

Dans ce modèle, on considère qu'il y a deux espèces (deux populations), les proies et les prédateurs.

Notons par $x(t)$ la densité de la population des proies et par $y(t)$ celle des prédateurs.

Le modèle de Lotka-Volterra s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = rx(t) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -my(t) + e\alpha x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce modèle fait l'hypothèse qu'en l'absence de prédateurs, la croissance des proies augmente exponentiellement tel que :

$$f(x) = rx$$

dont la solution est $x(t) = x(0) \exp(rt)$, avec $r > 0$ le taux de croissance des proies.

Dans l'absence des proies, la densité des prédateurs diminue avec :

$$g(y) = -my$$

dont la solution est $y(t) = y(0) \exp(-mt)$, avec $m > 0$ est le taux de mortalité naturelle du prédateur.

α est un paramètre constant positif qui rend compte de l'efficacité des prédateurs dans leur attaque, e représente le rendement de conversion de la biomasse proie en biomasse prédateur.

Le modèle (2.1) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t)(r - \alpha y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = y(t)(-m + bx(t)) \end{cases}$$

où nous posons $b = e\alpha$. Le fait de pouvoir mettre $x(t)$ en facteur dans la première équation et $y(t)$ dans la seconde est important parce que cela signifie que les axes sont isoclines zéros du système. En conséquence aucune trajectoire issue ne peut couper ni l'axe des abscisses ni l'axe des ordonnées. Ainsi, toute trajectoire issue d'une condition initiale prise dans le cadran positif reste pour tout $t > 0$ à l'intérieur de ce cadran. On dit que le cadran positif est positivement invariant.

2.1.1 Recherche des points d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = \frac{r}{\alpha} \\ \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{m}{b} \end{cases}$$

Le modèle de Lotka-Volterra admet deux points d'équilibre, l'origine $(0, 0)$, et un point non trivial appartenant au cadran positif tel que :

$$\begin{cases} x^* = \frac{m}{b} \\ y^* = \frac{r}{\alpha} \end{cases}$$

2.1.2 Etude de la stabilité des points d'équilibre

Pour déterminer les propriétés de stabilité locale des équilibres, il faut calculer la matrice Jacobienne :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \alpha y & -\alpha x \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

premier point d'équilibre $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

qui est une matrice diagonale et admet donc deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1 = r > 0$ et $\lambda_2 = -m < 0$, de signes opposés . Il s'agit donc d'un point selle instable.

second point d'équilibre $(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha})$

$$J(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-m\alpha}{b} \\ \frac{rb}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

Dont la trace est nulle et le déterminant $\det J = mr > 0$. donc le système (2.1) prévoit un centre au point $(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha})$. Cependant, d'après le théorème de linéarisation, nous ne pouvons pas conclure qu'il s'agit vraiment de trajectoire fermées entourant le point d'équilibre $(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha})$. Pour démontrer que les trajectoires centrales existent, il est nécessaire de rechercher une intégrale première possédant un extremum au point $(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha})$.

effectuons le calcul suivant :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r - \alpha y)}{y(-m + bx)}$$

Il s'agit d'une equation a variables séparées :

$$-m \frac{dx}{x} + bdx = r \frac{dy}{y} - \alpha dy,$$

après intégration on obtient :

$$-m \ln(x) + bx = r \ln(y) + bx + \alpha y + K.$$

où K est une constante d'intégration.

On peut prendre comme intégrale première la fonction :

$$H(x, y) = -m \ln(x) - r \ln(y) + bx + \alpha y.$$

en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x(t), y(t))}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left(-\frac{m}{x} + b\right)(rx - \alpha xy) + \left(-\frac{r}{y} + \alpha\right)(-my + bxy) \\ &= -mr + \alpha my + rbx - \alpha bxy + mr - rbx - \alpha my + \alpha bxy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$H(x(t), y(t)) = cste \quad \forall t > 0$$

$$\begin{aligned} \nabla H(x(t), y(t)) &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)^\top \\ &= \left(-\frac{m}{x} + b, -\frac{r}{y} + \alpha \right)^\top \end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \nabla H\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha}\right) &= \left(-b + b, -\alpha + \alpha \right) \\ &= \left(0 \quad 0 \right) \end{aligned}$$

Donc la fonction $H(x, y)$ admet un extremum au point $\left(\frac{m}{b}, \frac{r}{\alpha}\right)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{m}{x^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{r}{y^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

Le développement limité au second ordre de la fonction $H(x, y)$, est donné par :

$$H(x, y) = H(x^*, y^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(x^*, y^*)}{\partial x^2} (x - x^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H(x^*, y^*)}{\partial y^2} (y - y^*)^2 + o(h)^2$$

Ainsi, le signe de $H(x, y) - H(x^*, y^*)$ est positif au voisinage du point (x^*, y^*) , ce qui veut dire que la fonction $H(x, y)$ présente un minimum locale en ce point, il en résulte que les trajectoires autour de cet équilibre sont fermées. Nous pouvons donc affirmer que les trajectoires centrales sont bien conservées.

2.2 MODÈLE DE LOTKA-VOLTERRA ET CROISSANCE LOGISTIQUE

Nous avons vu que le modèle de Lotka-Volterra prévoit des centres autour de point d'équilibre non trivial. De plus, en l'absence de prédateur, la croissance des proies est illimitée "ce qui est irréalisable". On doit supposer dans ce modèle qu'en l'absence de prédateur, la population des proies doit atteindre un certain seuil qui dépend des ressources disponibles dans le milieu.

Soit le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -my(t) + bx(t)y(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $b = \alpha e$ et $K > 0$ la capacité limite du milieu.

Le modèle (2.2) peut s'écrire en factorisant les variables x et y dans les deux équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) \left(r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \alpha y(t) \right) \\ \frac{d}{dt}y(t) = y(t) (-m + bx(t)) \end{cases}$$

Donc le cadran positif est positivement invariant.

2.2.1 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow y = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K} \right) \text{ ou } x = 0$$

Les isoclines horizontales

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{m}{b}$$

2.2.2 Recherche des états d'équilibre

Les points d'équilibre sont les intersections des isoclines zéros, et par conséquence, deux cas sont possibles :

1. $\frac{m}{b} < K$ il y a trois points d'équilibres $(0,0)$, $(K,0)$, (x^*, y^*) tel que :

$$\begin{cases} x^* = \frac{m}{b} \\ y^* = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{m}{bK} \right) \end{cases}$$

2. $\frac{m}{b} > k$ dans ce cas il existe que deux points d'équilibres $(0,0)$, $(K,0)$

2.2.3 la stabilité des points d'équilibre

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre calculons la matrice Jacobienne associée au système (2.2) :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \alpha x & -\alpha x \\ by & -m + bx \end{pmatrix}$$

premier point d'équilibre $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = r > 0 \\ \lambda_2 = -m < 0 \end{cases}$$

donc $(0,0)$ est un point selle instable.

second point d'équilibre $(K,0)$

$$J(K,0) = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & -m + bK \end{pmatrix}$$

qui admet deux valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -r < 0 \\ \lambda_2 = -m + bK \end{cases}$$

donc, il y a deux cas possibles :

1. $m < bK \Rightarrow \lambda_2 > 0$, les valeurs propres sont de signes contraires, donc $(K,0)$ est un point selle instable.
2. $m > bK \Rightarrow \lambda_2 < 0$, les valeurs propres sont de signe négatifs, donc $(K,0)$ est un nœud stable.

troisième point d'équilibre (x^*, y^*)

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K} - \alpha x^* & -\alpha x^* \\ by^* & -m + bx^* \end{pmatrix}$$

On sait que le point d'équilibre (x^*, y^*) vérifie :

$$\begin{cases} r - \frac{rx^*}{K} - \alpha y^* = 0 \\ -m + bx^* = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On injecte les equations (2.3) dans la matrice Jacobienne, ce qui conduit à une simplification :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{rx^*}{K} - \alpha x^* & \\ by^* & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{cases} \text{tr}J(x^*, y^*) = -\frac{rx^*}{K} < 0 \\ \text{det}J(x^*, y^*) = \alpha bx^* y^* > 0 \end{cases}$$

Par conséquent, le point d'équilibre (x^*, y^*) est stable dès qu'il existe.

- 1)- si $m > bK$ $(K, 0)$ est stable tandis que (x^*, y^*) est infaisable.
- 2)- si $m < bK$ l'équilibre $(K, 0)$ est instable, (x^*, y^*) existe et il est stable

Pour $m = bK$ les deux équilibres coïncident Par conséquent nous avons une bifurcation transcritique lorsque m traverse bK où, le paramètre critique $m_c = m = bK$.

2.3 MODÈLE CLASSIQUE DE MUTUALISME INTERSPÉCIFIQUE

Considérons deux populations en interaction tel que chaque population a un effet positif sur la croissance de l'autre, ce qui caractérise le mutualisme.

En absence de l'une des deux populations, l'autre obéit à une équation de type logistique.

Notons par $x(t)$ la densité de la première population à l'instant t et $y(t)$ la densité de la seconde population.

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = r \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) x(t) + \alpha x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = m \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) y(t) + e\alpha x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

où, K_x et K_y sont les capacités limites des deux populations

r et m représentent les taux de croissance intrinsèque de deux populations.

Les paramètres α et $e\alpha$ sont positifs et caractérisent la force de mutualisme exercée par une population sur l'autre.

Par factorisation, on peut écrire le modèle (2.4) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) \left(r \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) + \alpha y(t) \right) \\ \frac{d}{dt}y(t) = y(t) \left(m \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) + e\alpha x(t) \right) \end{cases}$$

Le fait de mettre $x(t)$ et $y(t)$ en facteur signifie que les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont deux isoclines.

2.3.1 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow y = -\frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) \text{ ou } x = 0.$$

L'équation :

$$x \mapsto -\frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K_x}\right)$$

est une droite qui passe par les points, $(K_x, 0), (0, -\frac{r}{\alpha})$.

Les isoclines horizontales

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{K_y}{m} (m + e\alpha x).$$

tel que, l'équation :

$$y \mapsto \frac{K_y}{m} (m + e\alpha x)$$

est une droite qui passe par les deux points, $(0, K_y), (\frac{-m}{e\alpha}, 0)$

2.3.2 Recherche des états d'équilibre

Nous avons deux cas possibles :

1. si $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} > 1$, dans ce cas il y a trois points d'équilibre biologiquement réalisables $(0, 0), (K_x, 0), (0, K_y)$.
2. si $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1$, dans ce cas, il existe quatre points d'équilibres $(0, 0), (K_x, 0), (0, K_y), (x^*, y^*)$, ce dernier se trouve dans le cadran positive et donner par :

$$\begin{cases} x^* = \frac{K_x m (r + \alpha K_y)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} \\ y^* = \frac{K_y r (m + e\alpha K_x)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} \end{cases}$$

Remarque : L'existence du point d'équilibre (x^*, y^*) entraîne que :

$$x^* > K_x \text{ et } y^* > K_y$$

car

$$\frac{m(r + \alpha K_y)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} > 1, \frac{r(m + e\alpha K_x)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} > 1$$

2.3.3 Etude de la stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne associée au modèle (2.4) donné par :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K_x} + \alpha y & \alpha x \\ e\alpha y & m - \frac{2my}{K_y} + e\alpha x \end{pmatrix}$$

le point d'équilibre (0,0)

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = r > 0 \\ \lambda_2 = m > 0 \end{cases}$$

donc, (0,0) est un noeud instable.

le point d'équilibre (K_x,0)

$$J(K_x,0) = \begin{pmatrix} -r & \alpha K_x \\ 0 & m + e\alpha K_x \end{pmatrix}$$

où, les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -r < 0 \\ \lambda_2 = m + e\alpha K_x > 0 \end{cases}$$

donc, (K_x,0) est un point selle instable.

le point d'équilibre (0,K_y)

$$J(0,K_y) = \begin{pmatrix} r + \alpha K_y & 0 \\ e\alpha K_y & -m \end{pmatrix}$$

tel que les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = r + \alpha K_y > 0 \\ \lambda_2 = -m < 0 \end{cases}$$

donc, $(0, K_y)$ est aussi un point selle instable.

le point d'équilibre (x^*, y^*)

Nous allons supposer que $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1$, pour que le point d'équilibre (x^*, y^*) soit dans le cadran positif.

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K_x} + \alpha y^* & \alpha x^* \\ e\alpha y^* & m - \frac{2my^*}{K_y} + e\alpha x^* \end{pmatrix}$$

remplaçons chaque composantes par sa valeur on obtient :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{rx^*}{K_x} & \alpha x^* \\ e\alpha y^* & -\frac{my^*}{K_y} \end{pmatrix}$$

Dont la trace est donnée par :

$$trJ(x^*, y^*) = -\left(\frac{rx^*}{K_x} + \frac{my^*}{K_y}\right) < 0$$

et le déterminant :

$$detJ(x^*, y^*) = \left(\frac{rm}{K_x K_y} - e\alpha^2\right) x^* y^*$$

Puisque $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1 \Rightarrow detJ(x^*, y^*) > 0$, donc (x^*, y^*) est stable.

2.3.4 Interprétation biologique

1. si $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1$, cela signifie que l'effet du mutualisme exercé par chaque population sur l'autre est faible donc nous avons la coexistence de deux espèces. Le portrait de phase correspondant est présenté dans la [Figure.2.7](#).

2. si $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} > 1$, alors dans ce cas l'équilibre (x^*, y^*) n'a pas de sens biologique, et tous les autres équilibres sont instables, par conséquent les trajectoires partent à l'infini à cause d'un trop fort effet de mutualisme, donc les résultats deviennent irréalistes. **Figure.2.9.**

2.4 MODÈLE CLASSIQUE DE COMPÉTITION INTERSPÉCIFIQUE

Nous allons reprendre le modèle (2.4) et remplacer le signe positif devant les termes d'interaction par le signe négatif cela signifie que chaque population exerce un effet négatif sur la croissance de l'autre.

Le modèle de compétition s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = r \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) x(t) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) = m \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) y(t) - e\alpha x(t)y(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Le modèle (2.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = x(t) \left(r \left(1 - \frac{x(t)}{K_x}\right) - \alpha y(t) \right) \\ \frac{d}{dt}y(t) = y(t) \left(m \left(1 - \frac{y(t)}{K_y}\right) - e\alpha x(t) \right) \end{cases}$$

ce qui signifie encore une fois que les axes $x = 0$ et $y = 0$ sont des isoclines.

2.4.1 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow y = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K_x}\right) \text{ ou } x = 0.$$

L'équation :

$$x \mapsto \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{x}{K_x}\right)$$

est une droite qui passe par les points, $(K_x, 0), (0, \frac{r}{\alpha})$.

Les isoclines horizontales

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = \frac{K_y}{m} (m - e\alpha x).$$

tel que, l'équation :

$$y \mapsto \frac{K_y}{m} (m - e\alpha x)$$

est une droite qui passe par les deux points, $(0, K_y)$, $(\frac{m}{e\alpha}, 0)$

2.4.2 Recherche des états d'équilibre

Nous avons quatre cas possibles :

1. si $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$, dans ce cas il y a quatre points d'équilibre $(0, 0)$, $(K_x, 0)$, $(0, K_y)$, (x^*, y^*) .
2. si $\frac{\alpha K_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$, là aussi on a quatre points d'équilibre $(0, 0)$, $(K_x, 0)$, $(0, K_y)$, (x^*, y^*) , ce dernier est donné par :

$$\begin{cases} x^* = \frac{K_x m (r - \alpha K_y)}{r m - e\alpha^2 K_x K_y} \\ y^* = \frac{K_y r (m - e\alpha K_x)}{r m - e\alpha^2 K_x K_y} \end{cases}$$

3. si $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$, on a trois points d'équilibre $(0, 0)$, $(K_x, 0)$, $(0, K_y)$.
4. si $\frac{\alpha K_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$, on a trois points d'équilibre aussi $(0, 0)$, $(K_x, 0)$, $(0, K_y)$.

Remarque : L'existence du point d'équilibre (x^*, y^*) entraîne que :

$$x^* < K_x \text{ et } y^* < K_y$$

car

$$\frac{m(r - \alpha K_y)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} < 1, \quad \frac{r(m - e\alpha K_x)}{rm - e\alpha^2 K_x K_y} < 1$$

2.4.3 Etude de la stabilité des points d'équilibres

La matrice Jacobienne associée au modèle (2.5) est donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K_x} - \alpha y & -\alpha x \\ -e\alpha y & m - \frac{2my}{K_y} - e\alpha x \end{pmatrix}$$

premier point d'équilibre $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = r > 0 \\ \lambda_2 = m > 0 \end{cases}$$

donc, $(0, 0)$ est toujours un nœud instable.

deuxième point d'équilibre $(K_x, 0)$

$$J(K_x, 0) = \begin{pmatrix} -r & \alpha K_x \\ 0 & m - e\alpha K_x \end{pmatrix}$$

où, les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -r < 0 \\ \lambda_2 = m - e\alpha K_x \end{cases}$$

donc, deux cas sont possibles :

1. si $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1 \Rightarrow (K_x, 0)$ est un nœud stable .

2. si $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1 \Rightarrow (K_x, 0)$ est un point selle instable .

troisième point d'équilibre $(0, K_y)$

$$J(0, K_y) = \begin{pmatrix} r - \alpha K_y & 0 \\ -e\alpha K_y & -m \end{pmatrix}$$

tel que les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = r - \alpha K_y \\ \lambda_2 = -m < 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à deux cas :

1. si $\frac{\alpha K_y}{r} > 1 \Rightarrow (0, K_y)$ est un nœud stable .
2. si $\frac{\alpha K_y}{r} < 1 \Rightarrow (0, K_y)$ est un point selle instable.

quatrième point d'équilibre (x^*, y^*)

Nous allons supposer que $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1$, pour que le point d'équilibre (x^*, y^*) soit dans le cadran positif.

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx^*}{K_x} - \alpha y^* & -\alpha x^* \\ -e\alpha y^* & m - \frac{2my^*}{K_y} - e\alpha x^* \end{pmatrix}$$

remplaçons chaque composantes par sa valeur on obtient :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} -\frac{rx^*}{K_x} & -\alpha x^* \\ -e\alpha y^* & -\frac{my^*}{K_y} \end{pmatrix}$$

tel que :

$$\begin{cases} \text{tr}J(x^*, y^*) = -\left(\frac{rx^*}{K_x} + \frac{my^*}{K_y}\right) < 0 \\ \text{det}J(x^*, y^*) = \left(\frac{rm}{K_x K_y} - e\alpha^2\right) x^* y^* > 0 \end{cases}$$

Par conséquent (x^*, y^*) est stable .

2.4.4 Interprétation biologique des résultats

1. si $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$, l'effet de compétition est très faible par rapport aux deux espèces, par conséquent on a la coexistence de deux populations avec des effectifs constants et inférieurs à la capacité limite du milieu, voir [Figure.2.11](#).
2. si $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$, dans ce cas la force de compétition exercée par la première population sur la seconde est très forte, le point d'équilibre associé à l'existence de deux espèces n'appartient pas au cadran positif, alors que la première population tend vers sa capacité limite, et l'autre est exclut, voir [Figure.2.13](#).
3. si $\frac{\alpha K_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$, la deuxième population exerce une compétition très forte sur la première, le point (x^*, y^*) n'appartient pas au cadran positif, donc la population 1 tend vers l'extinction et l'autre tend vers sa capacité limite, voir [Figure.2.15](#).
4. si $\frac{\alpha K_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$, chaque population exerce une force de compétition très forte sur l'autre, l'équilibre (x^*, y^*) existe mais il est instable, et les deux équilibres $(K_x, 0)$, $(0, K_y)$ sont stables et selon les conditions initiales, les trajectoires tendent vers l'un des deux équilibres, donc une population va tendre vers l'extinction, et l'autre tend vers sa capacité limite, voir [Figure.2.17](#).

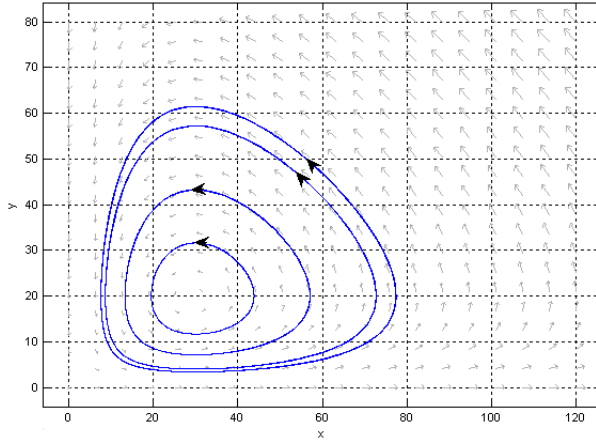


FIGURE 2.1 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra qui représente des solutions centrales autour d'équilibre (x^*, y^*) .

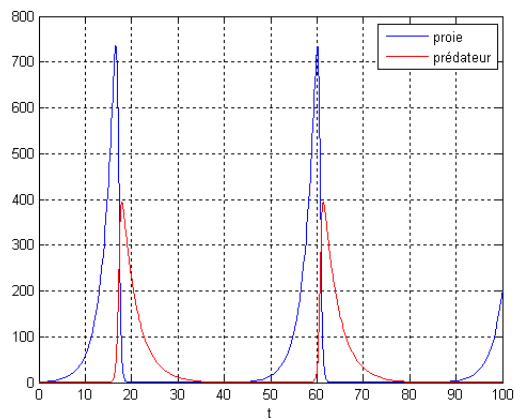


FIGURE 2.2 – La croissance de la population des proies et des prédateurs au cours du temps montrant des solutions périodiques.

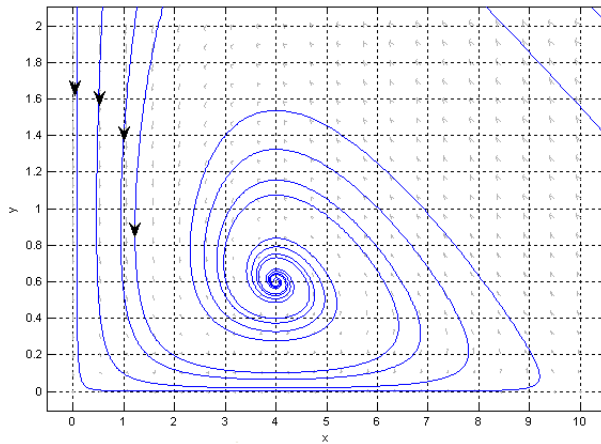


FIGURE 2.3 – Portrait de phase du modèle de Lotka Volterra avec croissance logistique des proies qui représente la coexistence des deux population, $r = 0.1, K = 10, \alpha = 0.1, m = 0.2, b = 0.05$.

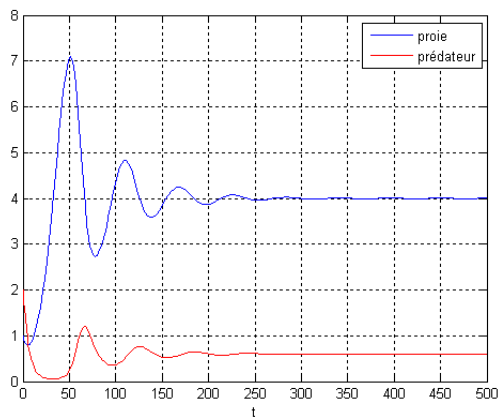


FIGURE 2.4 – la croissance des deux populations en fonction du temps où les deux effectifs se stabilise a des densités constants au bout d'un certain temps

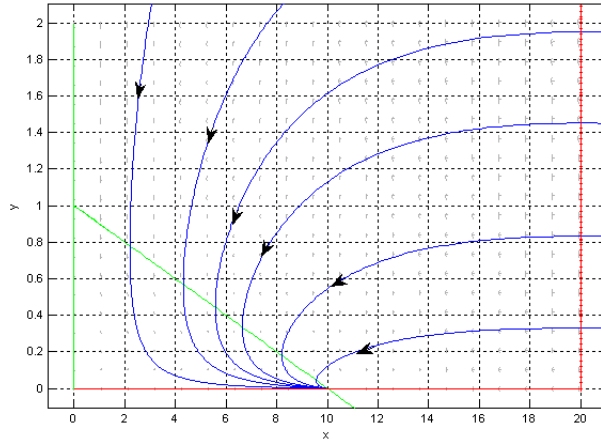


FIGURE 2.5 – Portrait de phase du modèle de Lotka Volterra avec croissance logistique des proies qui représente l'extinction des prédateurs, $r = 0.1, K = 10, \alpha = 0.1, m = 0.2, b = 0.01$.

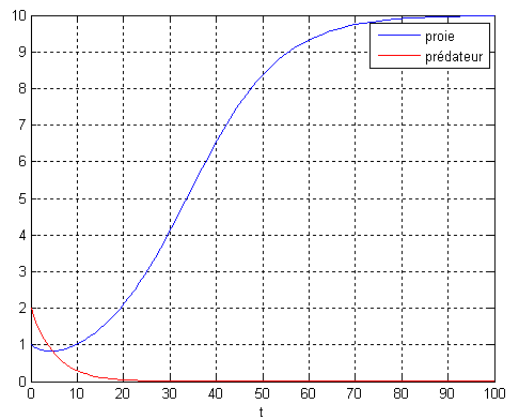


FIGURE 2.6 – La croissance des deux populations où la densité des proies tend vers sa capacité limite et celle des prédateurs tendent vers l'extinction.

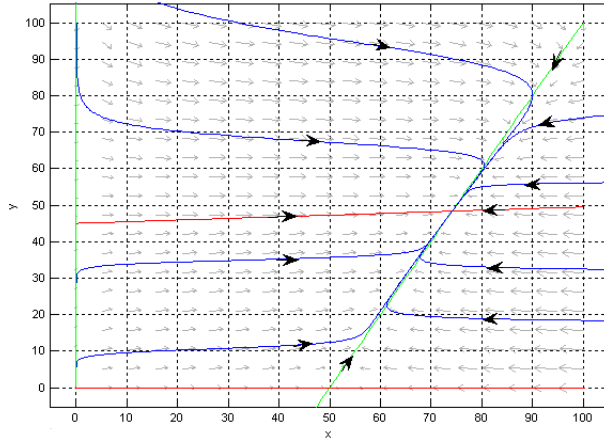


FIGURE 2.7 – Portait de phase du modèle (2.4), $\frac{e\alpha^2 K_x K_y}{mr} < 1$. On à la coexistence de deux populations, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, m = 0.1, \alpha = e = 0.01$.

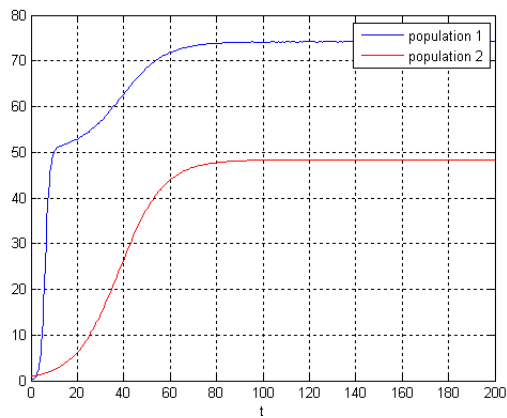


FIGURE 2.8 – la croissance de deux populations au cours du temps, où les densités existent avec des effectifs constants et supérieurs aux capacités limites.

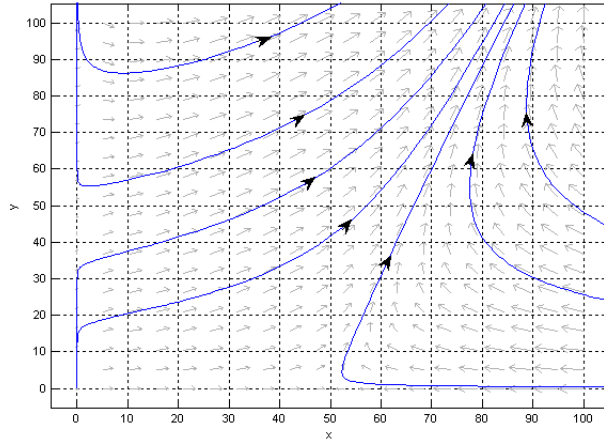


FIGURE 2.9 – portrait de phase du modèle (2.4), $\frac{ea^2K_xK_y}{mr} > 1$. Les effectifs des populations tendent vers l'infini, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, m = 0.1, \alpha = 0.01, e = 1$.

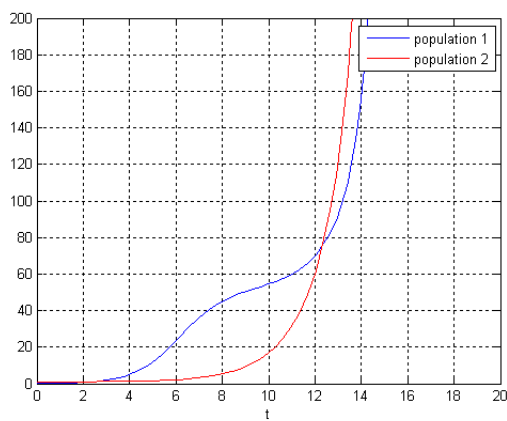


FIGURE 2.10 – la croissance de deux populations, où les densités partent à l'infini.

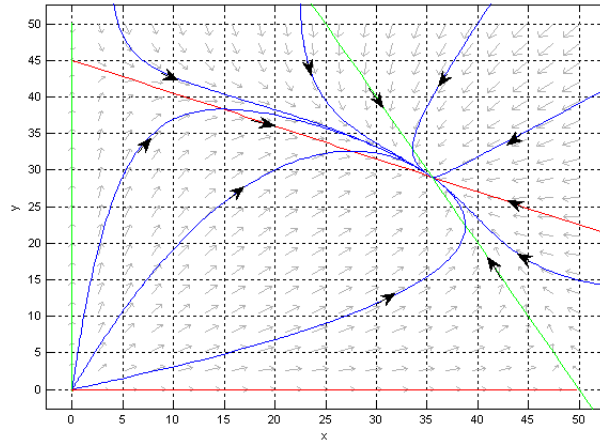


FIGURE 2.11 – Portrait de phase du modèle (2.5), $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$. Coexistence des compétiteurs, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, \alpha = 0.01, m = e = 1$.

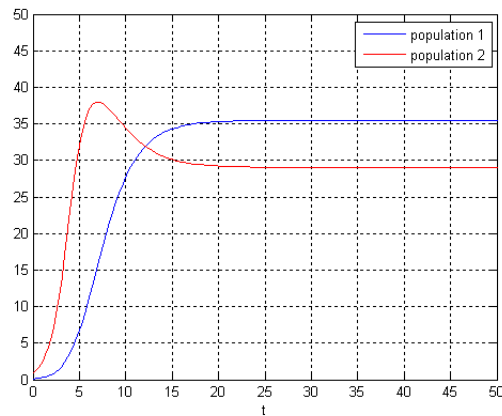


FIGURE 2.12 – La croissance de deux compétiteurs, où les deux densités existent avec des effectifs constants et inférieurs aux capacités limites.

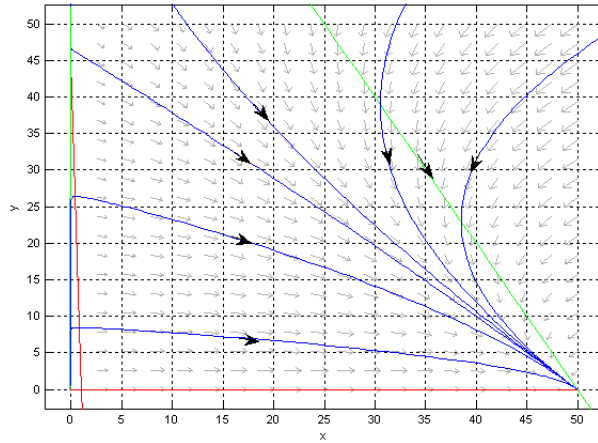


FIGURE 2.13 – Portrait de phase du modèle (2.5), $\frac{\alpha K_y}{r} < 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$. La population 2 est exclut, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, \alpha = 0.01, m = 0.01, e = 1$.

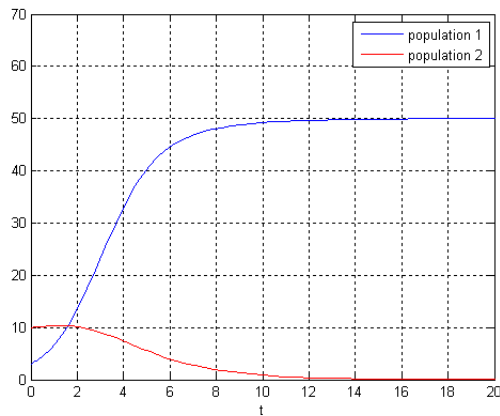


FIGURE 2.14 – La croissance de deux compétiteurs, où la population 1 tend vers sa capacité limite et l'autre est exclut.

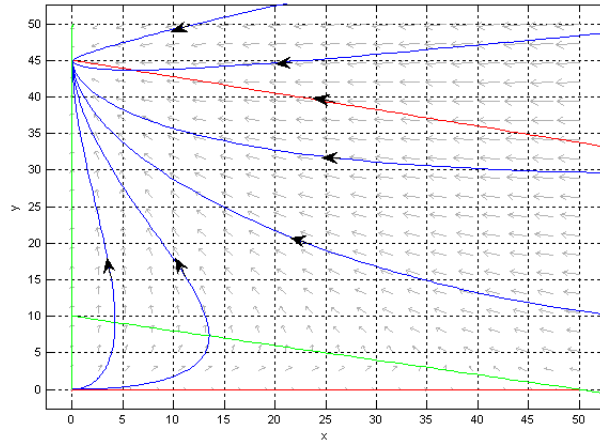


FIGURE 2.15 – Portrait de phase du modèle (2.5), $\frac{aK_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} < 1$. La population 1 est exclut, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, \alpha = 0.1, m = 2, e = 0.1$.

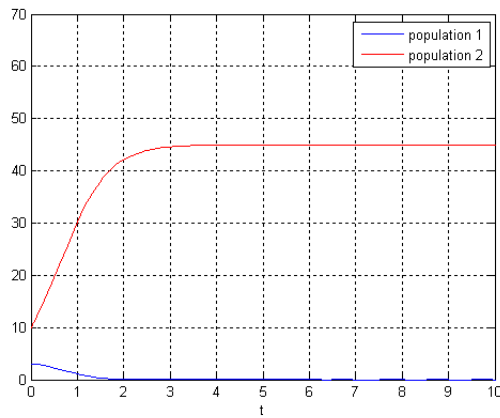


FIGURE 2.16 – La croissance de deux compétiteurs, où la population 2 tend vers sa capacité limite et l'autre est exclut.

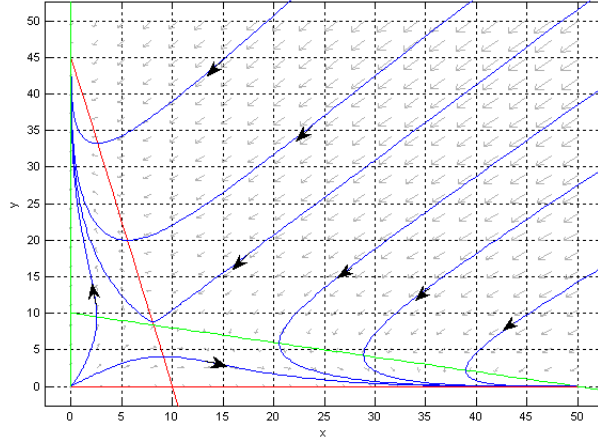


FIGURE 2.17 – Portrait de phase du modèle (2.5), $\frac{\alpha K_y}{r} > 1$ et $\frac{e\alpha K_x}{m} > 1$. Les trajectoires tendent soit vers $(K_x, 0)$ ou $(0, K_y)$ selon le choix des conditions initiales, $r = 1, K_x = 50, K_y = 45, \alpha = 0.1, m = e = 1$.

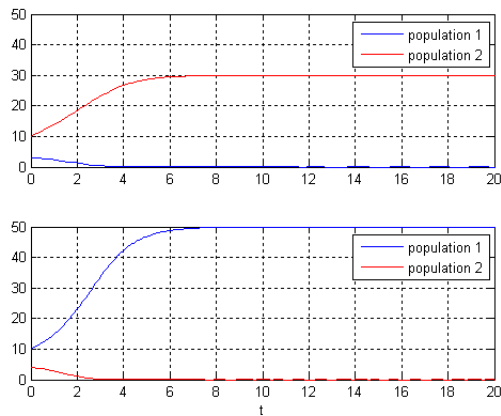


FIGURE 2.18 – La croissance de deux populations, selon la condition initial on à soit l'extinction de la première population où la seconde.

MODÉLISATION DU COMPORTEMENT GRÉGAIRE DANS DES SYSTÈMES DE POPULATION

Ce chapitre est un développement et une lecture détaillée de l'article [1], on y retrouvera aussi quelques résultats présentés dans [5]. Dans ce chapitre, nous montrons que sous des hypothèses simples et adaptées le système classique de deux populations peut présenter des comportements inattendus. Considérant un modèle social plus élaboré, dans lequel les individus d'une population se rassemblent en troupeaux. Tandis que l'autre montre un comportement plus individualiste, nous modélisons le fait que les interactions entre les deux se produisent principalement dans le périmètre du troupeau. Nous expliquons tous les types d'interactions des populations, symbiose, compétition et les interactions Proie-Prédateur. Il y a une situation dans laquelle l'exclusion compétitive ne se tient pas : le comportement de troupeau socialisé empêche la population individualiste en compétition de disparaître. Dans le cas de Proie-Prédateur, les cycles limite soutenus sont possibles, l'existence des bifurcations de Hopf représentant une caractéristique distinctive de ce modèle par rapport aux autres modèles classique Proie-Prédateur.

3.1 LE NOUVEAU MODÈLE SYMBIOTIQUE

Ici, nous introduisons le comportement du troupeau, de la manière suivante. Si l'on considère $x(t)$ pour représenter la densité de la première population, à savoir le nombre d'individus par unité de surface, avec le trou-

peau occupant une surface A , il en résulte que les individus qui prennent des positions extrêmes dans le troupeau sont proportionnels au périmètre du patch où le troupeau se trouve dont la longueur dépend de \sqrt{A} . Donc, ils sont en nombre proportionnel à la racine carrée de la densité, i.e à \sqrt{x} , avec une constante de proportionnalité dépendant de la forme du troupeau. Les interactions avec la deuxième population ne se produisent que par ces individus qui se trouvent sur la frontière, donc au lieu de l'expression standard d'action-masse donnant le type quadratique d'interaction de (2.4), nous trouvons un terme proportionnel à \sqrt{xy} . Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x(\tau) = r \left(1 - \frac{x(\tau)}{K_x}\right) x(\tau) + \tilde{\alpha} \sqrt{x(\tau)}y(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}y(\tau) = \tilde{m} \left(1 - \frac{y(\tau)}{K_y}\right) y(\tau) + \tilde{\epsilon}\tilde{\alpha} \sqrt{x(\tau)}y(\tau) \end{cases} \quad (3.1)$$

où, la première équation décrit l'évolution de la population très socialisée qui se reproduit d'une manière logistique avec $r > 0$, le taux de croissance, $K_x > 0$, la capacité limite du milieu et comme mentionné, il interagit avec le second que par les individus qui se trouvent sur la frontière du troupeau. La seconde population croît aussi logistiquement et bénéficie d'interactions par un facteur $\tilde{\epsilon}$.

Les paramètres \tilde{m} , K_y et $\tilde{\alpha}$ sont supposés positifs.

3.1.1 La simplification du modèle

On voit facilement que le modèle (3.1) possède une singularité dans la jacobienne, dû au terme de racine carrée. Donc, il est préférable d'enlever cette racine avant commencer l'analyse du modèle.

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u(\tau) = \sqrt{x(\tau)} \\ v(\tau) = y(\tau) \end{cases}$$

après un calcul simple le modèle (3.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}u(\tau) = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{u^2(\tau)}{K_x}\right) u(\tau) + \frac{\tilde{\alpha}}{2}v(\tau) \\ \frac{d}{dt}v(\tau) = \tilde{m} \left(1 - \frac{v(\tau)}{K_y}\right) v(\tau) + \tilde{e}\tilde{\alpha}u(\tau)v(\tau) \end{cases} \quad (3.2)$$

puisque'on a divisé la première équation par u , cependant, si $u = 0$, la première équation devient une identité, et le système se réduit à l'évolution de l'équation de v .

Si nous redimensionnons les variables comme suit :

$$\begin{cases} p = \frac{u}{K_x} \\ f = \frac{v}{K_y} \\ t = \frac{r\tau}{2} \end{cases}$$

on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left(1 - \frac{u^2(t)}{K_x}\right) u(t) + \frac{\tilde{\alpha}}{r}v(t) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{2\tilde{m}}{r} \left(1 - \frac{v(t)}{K_y}\right) v(t) + \frac{2\tilde{e}\tilde{\alpha}}{r}u(\tau)v(t) \end{cases}$$

Et le modèle va s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = (1 - p^2(t)) p(t) + \alpha f(t) \\ \frac{d}{dt}f(t) = m(1 - f(t)) f(t) + ep(t)f(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\tilde{\alpha}K_y}{r\sqrt{K_x}} \\ m = \frac{2\tilde{m}}{r} \\ e = \frac{2\tilde{e}\tilde{\alpha}\sqrt{K_x}}{r} \end{cases}$$

3.1.2 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{\alpha}(p^2 - 1)p$$

Les isoclines horizontales

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ou } f = 1 + \frac{e}{m}p$$

3.1.3 Les points d'équilibre

Les points d'équilibre sont : $p_1^s = (0, 0)$, $p_2^s = (1, 0)$, $p_3^s = (0, 1)$, où le dernier résulte du fait mentionné ci-dessus, pour $u = 0$ la première équation devient une identité. Les deux derniers équilibres correspondent aux points $(K_x, 0)$ et $(0, K_y)$ dans le modèle original. L'équilibre de la coexistence $p_4^s = (p_p, f_p)$ provient des racines de l'équation cubique

$$\psi(p) = -p^3 + \left(1 + \frac{\alpha e}{m}\right)p + \alpha$$

Tel que sa dérivée est donné par :

$$\psi'(p) = -3p^2 + \left(1 + \frac{\alpha e}{m}\right)$$

$$\psi(p) = 0 \iff p = \bar{p}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{e\alpha}{m}\right)}$$

Le tableau de variation associé a la fonction ψ est donnée par :

p	0	\bar{p}_2	p_p	$+\infty$
$\psi'(p)$	+	0	-	
$\psi(p)$	α	$\psi(\bar{p}_2)$	0	$-\infty$

où

$$\psi(\bar{p}_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{e\alpha}{m}\right) \left(\frac{e\alpha}{m} + 1\right)} + \alpha > 0$$

Donc $\exists! p_p \in]\bar{p}_2; +\infty[$ tel que $\psi(p_p) = 0$

Le point d'équilibre associé à la coexistence de deux espèces donne :

$$f_p = \frac{1}{\alpha} p_p (p_p^2 - 1) = 1 + \frac{e}{m} p_p > 1 \quad (3.4)$$

Par conséquence on peut affirmer que :

$$\begin{cases} p_p \geq 1 \\ f_p > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1.4 La stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne du modèle (3.3) est :

$$J(p, f) = \begin{pmatrix} 1 - 3p^2 & \alpha \\ ef & m(1 - 2f) + ep \end{pmatrix}$$

point d'équilibre p_1^s

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Nous trouvons les valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = m > 0 \end{cases}$$

Donc $(0, 0)$ est un nœud instable.

point d'équilibre p_2^s

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 0 & m+e \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = m+e > 0 \end{cases}$$

Par conséquent $(1,0)$ est un point selle instable.

point d'équilibre p_3^s

à p_3^s le système (3.3) dégénère seulement sur la deuxième équation car, sur la ligne $p = 0$ où $f \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p = \alpha f \geq 0 \\ \frac{d}{dt}f = m(1-f)f \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \text{si } f < 1 \Rightarrow f' > 0 \Rightarrow f \nearrow \\ \text{si } f > 1 \Rightarrow f' < 0 \Rightarrow f \searrow \end{cases}$$

Cependant, pour tout point (ϵ, f^0) , tel que $\epsilon > 0$ arbitrairement petit et f^0 proche de 1 alors :

$$\frac{d}{dt}p = \alpha f^0 + \epsilon(1 - \epsilon^2) = \alpha f^0 + o(\epsilon) > 0,$$

Il s'ensuit que, p_3^s ne peut pas être stable dans le plan de phase $p - f$,

Figure.3.1.

point d'équilibre p_4^s

Les coordonnées explicites de p_4^s sont inconnues, mais de l'analyse de plan de phase, voir **Figure.3.1** on voit très bien que p_4^s est un no d stable. Cette conclusion est aussi algébriquement confirm e par la matrice Jacobienne tel que :

$$J(p_p, f_p) = \begin{pmatrix} 1 - 3p_p^2 & \alpha \\ ef_p & m(1 - 2f_p) + ep_p \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$m(1 - f_p) + ep_p = 0$$

donc

$$J(p_p, f_p) = \begin{pmatrix} 1 - 3p_p^2 & \alpha \\ ef_p & -mf_p \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \text{(a) : } -trJ(p_4^s) = \varphi(p_p) = 3p_p^2 - 1 + mf_p > 0 \\ \text{(b) : } detJ(p_4^s) = \phi(p_p) = -mf_p(1 - 3p_p^2) - \alpha ef_p > 0 \end{cases}$$

La première équation, en utilisant (3.5) peut être explicitement r ecrite comme suit :

$$\varphi(p_p) = 3p_p^2 - 1 + mf_p > 2 + mf_p > 0$$

Pour (b) en utilisant (3.4) et (3.5) on trouve :

$$\begin{aligned} \phi(p_p) &= -mf_p(1 - 3p_p^2) - \alpha ef_p \\ &= (3p_p^2 - 1)(m + ep_p) + ep_p(1 - p_p^2) \\ &= 3p_p^2m + 2p_p^3 - m > 2ep_p^3 + 2m > 0 \end{aligned}$$

Donc le point p_4^s est localement asymptotiquement stable.

Théorème 3.1. *L'équilibre de la coexistence p_4^s pour le système (3.2) est globalement asymptotiquement stable.*

démonstration

Soit le point (\hat{p}, \hat{f}) dans le plan de phase, avec $\hat{p} > p_p$, $\hat{f} > f_p$ et situé au-dessous de l'isocline $\frac{dp}{dt} = 0$ et au-dessus de l'isocline $\frac{df}{dt} = 0$, ainsi pour lesquels les inégalités

$$\begin{cases} (1 - \hat{p}^2) \hat{p} + \alpha \hat{f} < 0 \\ m(1 - \hat{f}) + e\hat{p} < 0 \end{cases}$$

Donc, on identifié un rectangle Ω dans le plan de phase, avec le sommet opposé donné par l'origine. Cet ensemble est positivement invariant pour le système (3.3). En fait puisque la droite $f = 0$ est une isocline donc, les trajectoires ne peuvent pas là traverser et on a vu que sur l'axe des abscisses les trajectoires vont pénétrer dans le cadran positif. En outre, on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p|_{p=\hat{p}, 0 \leq f \leq \hat{f}} = (1 - \hat{p}^2) + \alpha f < (1 - \hat{p}^2) + \alpha \hat{f} < 0 \\ \frac{d}{dt} f|_{f=\hat{f}, 0 \leq p \leq \hat{p}} = m\hat{f}(1 - \hat{f}) + ep\hat{f} < m\hat{f}(1 - \hat{f}) + e\hat{p}\hat{f} < 0 \end{cases}$$

Donc, puisque le choix de (\hat{p}, \hat{f}) est arbitraire alors, pour toute condition initiale (p^0, f^0) où, $(p^0 < \hat{p})$ et $(f^0 < \hat{f})$ les trajectoires pénètrent dans Ω .

On considère alors la fonction suivante :

$$v(p, f) = \frac{1}{pf}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left[v(p, f) \frac{dp}{dt} \right] + \frac{\partial}{\partial f} \left[v(p, f) \frac{df}{dt} \right] &= \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{pf} (p(1-p^2) + \alpha f) \right] + \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{1}{pf} (mf(1-f) + epf) \right] \\ &= -2\frac{p}{f} - \frac{\alpha}{p^2} - \frac{m}{p} < 0 \end{aligned}$$

nous découvrons qu'il est négatif dans Ω ; par le critère de Dulac le système (3.3) n'admet aucun cycle limite dans Ω .

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_p, f_p) \text{ est localement asymptotiquement stable} \\ (0, 0), (0, 1) \text{ et } (1, 0) \text{ sont instable} \\ \text{le système (3.3) n'admet pas de solution périodique dans } \Omega \end{array} \right.$$

Donc (p_p, f_p) est globalement asymptotiquement stable.

Remarque. *Le fait de considérer que la première population se regroupe en troupeaux rend le modèle plus réaliste car, il n'y a aucun cas où les effectifs tendent vers l'infini par contre dans le modèle classique il existe des cas où les deux densités tendent vers l'infini.*

3.1.5 Mutualisme obligé pour la population solitaire

Le mutualisme est l'interaction entre deux ou plusieurs organismes. Au cours de cette interaction, il y a un bénéfice réciproque.

Si l'interaction est obligatoire, c'est-à-dire qu'au moins une des espèces impliquées ne peut vivre sans, et que les organismes sont en contact, on parle de mutualisme symbiotique ou de symbiose.

Un exemple classique de relation mutualiste est la **pollinisation** par **les insectes**. Le bénéfice pour ceux-ci est un apport alimentaire. Pour les plantes, il s'agit de la possibilité de se reproduire.

Une variation du modèle (3.1) peut être introduite en considérant le mutualisme obligé. Nous l'assumons seulement à la deuxième popula-

tion ; aucune des modifications se produisent lorsqu'on suppose pour les deux populations. Le modèle est modifié comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x(\tau) = r \left(1 - \frac{x(\tau)}{K}\right) x(\tau) + \tilde{\alpha} \sqrt{x(\tau)}y(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}y(\tau) = -\tilde{m}y(\tau) + \tilde{e}\tilde{\alpha} \sqrt{x(\tau)}y(\tau) \end{cases} \quad (3.6)$$

Le modèle (3.6) présente un effet symbiotique car, l'absence de la population la plus organisée va influencer d'une manière négative sur la seconde où, la deuxième population tend vers l'extinction avec un taux de mortalité $\tilde{m} > 0$.

Les paramètres $r, K, \tilde{\alpha}, \tilde{e}$ sont supposés positifs.

La singularité du système (3.6) peut être enlevée grâce au changement de variable semblable au modèle (3.1).

$$\begin{cases} u(\tau) = \sqrt{x(\tau)} \\ p = \frac{u}{K} \\ t = \frac{r\tau}{2} \end{cases}$$

Après un calcul simple le modèle (3.6) va s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = (1 - p^2(t)) p(t) + \alpha f(t) \\ \frac{d}{dt}f(t) = (ep(t) - m) f(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

avec,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{r\sqrt{K}} \\ m = \frac{2\tilde{m}}{r} \\ e = \frac{2\tilde{\alpha}\tilde{e}\sqrt{K}}{r} \end{cases}$$

les point d'équilibre associés au modèle (3.7) sont :

$$\begin{cases} (0,0), (1,0), (\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1)) & \text{si } \rho > 1 \\ (0,0), (1,0) & \text{si } \rho < 1 \end{cases}$$

tel que :

$$\rho = \frac{m}{e}$$

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$\tilde{J}(p, f) = \begin{pmatrix} 1 - 3p^2 & \alpha \\ ef & ep - m \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

Où les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -m < 0 \end{cases}$$

par conséquent $(0,0)$ reste toujours instable (point selle).

$$\tilde{J}(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 0 & e - m \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = e - m \end{cases}$$

Donc , deux cas sont possibles :

* si $\rho > 1$, les deux valeurs propres sont négatives $\Rightarrow (1,0)$ est stable.

* si $\rho < 1$, la seconde valeur propre est positive $\Rightarrow (1, 0)$ est un point selle (instable).

Pour $\rho > 1$, l'équilibre de la coexistence existe.

$$\tilde{J}\left(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1)\right) = \begin{pmatrix} 1 - 3\rho^2 & \alpha \\ \frac{e}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

Tel que :

$$\begin{cases} \det \tilde{J}\left(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1)\right) = -e\rho(\rho^2 - 1) < 0 \\ \text{tr} \tilde{J}\left(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1)\right) = 1 - 3\rho^2 \end{cases}$$

Par conséquent $(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1))$ est toujours instable (point selle).

Remarque. $(0, 1)$ n'est pas un équilibre pour le modèle (3.7), contrairement à ce qui se produit quand la symbiose n'est pas obligée. C'est clairement biologiquement raisonnable, puisque $(1, 0)$ correspond à l'extinction de la population p qui est nécessaire pour la survie de f , les espèces pour lesquelles le mutualisme est obligé et donc ce dernier ne peuvent pas survivre.

En résumé, pour $\rho > 1$ où, le taux de mortalité pour la seconde population est plus grand au bénéfice dans ce cas l'équilibre $(1, 0)$ est localement asymptotiquement stable tandis que, $(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1))$ existe mais il est instable (point selle) et au-dessus d'intersection des isoclines les trajectoires tendent vers l'infinie, [Figure.3.5](#).

si $\rho < 1$ tous les équilibres sont instables, $(\rho, \frac{1}{\alpha}\rho(\rho^2 - 1))$ n'a pas de sens par conséquent, toutes les trajectoires du système (3.7) tendent vers l'infini. Mathématiquement ce résultat peut se produire mais du point de vue biologique il est indésirable alors, il faut ajouter des termes de limitation, [Figure.3.6](#).

3.2 MODÈLE DE COMPÉTITION

Nous considérons ici deux populations qui se battent pour les mêmes ressources. Encore une fois x est la densité de la population la plus socia-

lisée, vivant et se déplaçant en troupeaux. La population y est de nouveau la plus isolée et solitaire, les interactions entre les deux se produisent uniquement à la frontière du troupeau, impliquant donc que les individus de x qui occupent généralement des positions à la marge du troupeau. Le modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x(\tau) = r \left(1 - \frac{x(\tau)}{K_x}\right) x(\tau) - \tilde{\alpha}\sqrt{x(\tau)}y(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}y(\tau) = \tilde{m} \left(1 - \frac{y(\tau)}{K_y}\right) y(\tau) - \tilde{e}\tilde{\alpha}\sqrt{x(\tau)}y(\tau) \end{cases} \quad (3.8)$$

Par un changement de variable semblable au modèle (3.1) nous trouvons le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = (1 - p(t)^2) p(t) - \alpha f(t) \\ \frac{d}{dt}f(t) = m(1 - f(t)) f(t) - ep(t)f(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Où :

$$\begin{cases} m = \frac{2\tilde{m}}{r} \\ \alpha = \frac{\tilde{\alpha}K_y}{r\sqrt{K_x}} \\ e = \frac{2\tilde{\alpha}\tilde{e}\sqrt{K_x}}{r} \end{cases}$$

3.2.1 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{\alpha}(1 - p^2)p$$

la courbe avec l'équation :

$$p \mapsto f = \frac{1}{\alpha}(1 - p^2)p = \varphi(p)$$

est une parabole dont le tableau de variation est donné par :

p	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$+\infty$
$\varphi'(p)$		+	0	-
$\varphi(p)$	0	$\frac{2}{3\sqrt{3}\alpha}$	0	$-\infty$

Les isoclines horizontales

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ où } f = 1 - \frac{e}{m}p$$

tel que, l'équation :

$$p \mapsto f = 1 - \frac{e}{m}p$$

est une droite qui passe par les deux points, $(0, 1), (\rho, 0)$ avec, $\rho = \frac{m}{e}$

3.2.2 Les points d'équilibre

Les points d'équilibre sont : $p_1^c = (0, 0), p_2^c = (1, 0), p_3^s = (0, 1)$, où le dernier provient du fait de prendre $p = 0$, la première équation devient une identité. L'équilibre de coexistence est obtenu à partir des racines du polynôme cubique suivant :

$$\Pi(p) = p^3 - \left(1 + \frac{\alpha e}{m}\right)p + \alpha = 0 \tag{3.10}$$

dont la dérivée est donnée par :

$$\Pi'(p) = 3p^2 - \left(1 + \frac{\alpha e}{m}\right)$$

$$\Pi'(p) = 0 \iff p = \bar{p}_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{e\alpha}{m}\right)}$$

Par la règle de Descartes l'équation (3.10) possède soit deux racines positives ou bien aucune car, cette dernière possède deux changements

de signe par rapport au coefficient ($c = 2$) par conséquent le nombre maximal des racines positifs est inférieur ou égale à c .

Le tableau de variation associé à l'équation (3.10) sur l'intervalle $[0 + \infty[$ est le suivant :

p	0	\bar{p}	$+\infty$
$\Pi'(p)$		0	
$\Pi(p)$	α	$\Pi(\bar{p})$	$+\infty$

où

$$\bar{p} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{e\alpha}{m} \right)}$$

Pour avoir l'existence de deux racines il faut que :

$$\Pi(\bar{p}) \leq 0 \Rightarrow \bar{p}^3 \geq \frac{1}{2}\alpha$$

Par conséquent nous distinguons plusieurs cas :

- * si $\bar{p}^3 < \frac{1}{2}\alpha$ l'équation (3.10) ne possède aucune racine.
- * si $\bar{p}^3 = \frac{1}{2}\alpha$ et $\rho = 1$, alors il existe une racine double $p = 1$.
- * si $\bar{p}^3 > \frac{1}{2}\alpha$ dans ce cas trois cas sont possibles :
 - 1- $\rho > 1$, il existe deux racines distinctes dans le cadran positif.
 - 2- $\rho = 1$, il existe deux racines l'une dans l'intérieur du cadran positif et l'autre donnée par $p = 1$.
 - 3- $\rho < 1$, il y a une racine dans le cadran positif et l'autre se trouve dans la partie négative, donc biologiquement rejeté.

En fin les points d'équilibre sont :

* si $\bar{p}^3 \leq \frac{1}{2}\alpha$, nous avons trois équilibres $(0,0), (1,0), (0,1)$

* si $\bar{p}^3 > \frac{1}{2}\alpha$, deux cas sont possible :

1- $\rho \leq 1$, il y a quatre points d'équilibres p_1^c, p_2^c, p_3^c plus un point $(\tilde{p}_1, \tilde{f}_1)$ dans l'intérieur du cadran positif.

2- $\rho > 1$, il existe cinq états d'équilibres p_1^c, p_2^c, p_3^c et les deux équilibres de l'intérieur $(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2})$.

Les équilibres de l'intérieur $(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2})$ vérifient :

$$\tilde{f}_{1,2} = \frac{1}{\alpha} (1 - \tilde{p}_{1,2}^2) = 1 - \frac{e}{m} \tilde{p}_{1,2}$$

Donc, nous concluons que :

$$\begin{cases} \tilde{p}_{1,2} \leq 1 \\ \tilde{p}_{1,2} \leq \rho \end{cases} \implies \tilde{p}_{1,2} \leq \min(1, \rho)$$

De plus :

$$\tilde{p}_1 < \bar{p} < \tilde{p}_2$$

3.2.3 Étude de la stabilité des points d'équilibre

La matrice Jacobienne associé au modèle (3.9) est :

$$J(p, f) = \begin{pmatrix} 1 - 3p^2 & -\alpha \\ -ef & m(1 - 2f) - ep \end{pmatrix}$$

point d'équilibre p_1^c)

$$J(p_1^c) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Où, les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = m > 0 \end{cases}$$

donc $(0,0)$ est un nœud instable.

point d'équilibre p_2^c)

$$J(p_2^c) = \begin{pmatrix} -2 & -\alpha \\ 0 & m - e \end{pmatrix}$$

Tel que, les valeurs propres sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = m - e > 0 \end{cases}$$

1- si $\rho < 1$, alors p_2^c est localement asymptotiquement stable.

2- si $\rho > 1$, l'équilibre p_2^c est un point selle instable.

point d'équilibre p_3^c

À l'équilibre p_3^c le système se réduit seulement à une équation logistique car sur l'axe $p = 0$ où $f \geq 0$ nous avons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p = -\alpha f \leq 0 \\ \frac{d}{dt}f = m(1-f)f \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \text{si } f < 1 \Rightarrow f' > 0 \Rightarrow f \nearrow \\ \text{si } f > 1 \Rightarrow f' < 0 \Rightarrow f \searrow \end{cases}$$

Considérons le point (ϵ, f_0) avec, $\epsilon > 0$ arbitraire petit, $f_0 = 1 + \eta$ où, $\eta \in \mathbb{R}$ un paramètre arbitraire petit.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p = \epsilon(1 - \epsilon^2) - \alpha(1 + \eta) = -\alpha + o(\epsilon) + o(\eta) < 0 \\ \frac{d}{dt}f = mf_0(1 - f_0) - \epsilon\epsilon f_0 = -(1 + \eta)(m\eta + \epsilon\epsilon) \end{cases}$$

Le signe de cette dernière équation dépend de la façon de laquelle les quantités ϵ et η s'approchent de zéro. Mais puisque la première équation est de signe négatif ceci implique que p décroît donc, on peut affirmer que le point p_3^c est localement asymptotiquement stable.

point d'équilibre $(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2})$

Pour l'équilibre de l'intérieur nous avons :

$$J(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 - 3\tilde{p}_{1,2}^2 & -\alpha \\ -e\tilde{f}_{1,2} & m(1 - 2\tilde{f}_{1,2}) - e\tilde{p}_{1,2} \end{pmatrix}$$

Par un calcul simple nous trouvons :

$$J(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 - 3\tilde{p}_{1,2}^2 & -\alpha \\ -e\tilde{f}_{1,2} & -m\tilde{f}_{1,2} \end{pmatrix}$$

Dont le déterminant et la trace sont données par :

$$\begin{cases} \det J(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2}) = \tilde{f}_{1,2}(3m\tilde{p}_{1,2} - m - e\alpha) \\ -\text{tr} J(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2}) = 3\tilde{p}_{1,2}^2 + m\tilde{f}_{1,2} - 1 \end{cases}$$

$$\det J(\tilde{p}_{1,2}, \tilde{f}_{1,2}) > 0 \Rightarrow \tilde{p}_{1,2} > \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 + \frac{e\alpha}{m}\right)} = \bar{p}$$

par contre on sait que $\tilde{p}_1 < \bar{p}$ donc, $(\tilde{p}_1, \tilde{f}_1)$ est toujours un point selle (instable).

$$\text{puisque } \tilde{p}_2 > \bar{p} \Rightarrow \det J(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2) > 0$$

$$\begin{aligned} -trJ(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2) &= 3\tilde{p}_2^2 + m\tilde{f}_2 - 1 = 3\tilde{p}_2^2 + m \left(1 - \frac{e}{m}\tilde{p}_2\right) - 1 \\ &= 3\tilde{p}_2^2 - e\tilde{p}_2 + m - 1 \end{aligned}$$

Ce dernier est un polynôme de second degré en \tilde{p}_2 .

$$\Delta = e^2 + 12(1 - m)$$

si $\Delta < 0$ dans ce cas la quantité $-trJ(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2)$ est toujours positive donc, $(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2)$ est stable.

si $\Delta > 0$ alors, le polynôme admet deux racine qui sont les suivantes :

$$p^\pm = \frac{1}{6} \left(e^2 \pm \sqrt{\Delta} \right)$$

$$* \text{ si } m \geq 1 \implies p^\pm \geq 0$$

$$* \text{ si } m < 1 \implies p^- < 0$$

Par conséquence on distingue deux cas possibles :

$$1- \text{ si } m \geq 1, -trJ(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2) > 0 \text{ pour } \tilde{p}_2 \in [0, p^-] \cup [p^+, +\infty[$$

$$2- \text{ si } m < 1, -trJ(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2) > 0 \text{ pour } \tilde{p}_2 \in [p^+, +\infty[$$

Théorème 3.2. *Supposons que la condition :*

$$\bar{p}^3 \geq \frac{1}{2}\alpha$$

est bien vérifiée alors on a :

$(\tilde{p}_1, \tilde{f}_1)$ est toujours instable en plus,

** Pour $\Delta < 0$ l'équilibre $(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2)$ est stable.*

* Pour $\Delta > 0$ et $m < 1$ l'équilibre d'intérieur $(\tilde{p}_2 \tilde{f}_2)$ existe et stable si $\tilde{p}_2 > \max(\bar{p}, p^+)$

* Pour $\Delta > 0$ et $m > 1$ l'équilibre d'intérieur $(\tilde{p}_2 \tilde{f}_2)$ existe et stable si $\tilde{p}_2 > \max(\bar{p}, p^+)$ où $\bar{p} < \tilde{p}_2 < p^-$

Plus précisément, pour $\rho > 1$ il peut y avoir soit deux équilibres ou aucun équilibre ; voir respectivement [Figure 3.10](#) et [3.11](#). Dans ce dernier cas, p_3^c est toujours stable. Dans le premier cas, $(\tilde{p}_1 \tilde{f}_1)$ est un point selle, p_3^c et $(\tilde{p}_1 \tilde{f}_1)$ sont tous les deux stable par conséquent nous avons un effet de bistabilité. Pour $\rho < 1$ le point $(\tilde{p}_1 \tilde{f}_1)$ est encore un point selle, $(\tilde{p}_2 \tilde{f}_2)$ est infaisable, le modèle expose encore une fois un effet de bistabilité, mais dans ce cas avec les équilibres p_3^c et p_2^c [Figure. 3.7](#). Par conséquent, en général, mis à part le cas de $(\tilde{p}_2 \tilde{f}_2)$ étant réalisable, le principe d'exclusion compétitive pour le modèle classique, conserve sa validité dans le nouveau modèle aussi bien. Le cas limite correspondant à $\rho = 1$ peut avoir un seul équilibre stable, [Figure.3.8](#), mais il peut également présenter un effet de bistabilité, [Figure.3.9](#), selon que $\alpha > 1$ où $\alpha < 1$.

Nous avons vu que pour $m > 1$ et $\Delta > 0$ le modèle (3.9) présente un effet de bistabilité [Figure.3.11](#), ce qui donne une nouvelle caractéristique pour le modèle (3.9), par rapport au modèle classique de compétition. En fait, selon la condition initiale (p_0, f_0) , soit seule la population f survit à l'équilibre p_3^c , où les deux populations survivent, à l'équilibre d'intérieur stable. Le comportement grégaire agit alors comme un facteur qui pourrait permettre la survie de la population individualiste (solitaire), ce qui est un résultat inattendu.

3.3 LE MODÈLE PROIE-PRÉDATEUR

Dans ce contexte, $y(\tau)$ représente la densité du prédateur et $x(\tau)$ celle de proie, cette dernière présente un comportement plus socialisé vivant dans des troupes, les individus les plus faibles étant conservés au centre de leurs troupeau, le modèle va écrire comme suite :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}x(\tau) = r \left(1 - \frac{x(\tau)}{K}\right) x(\tau) - \tilde{\alpha}\sqrt{x(\tau)}y(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}y(\tau) = -\tilde{m}y(\tau) + \tilde{\alpha}\tilde{e}\sqrt{x(\tau)}y(\tau) \end{cases} \quad (3.11)$$

avec, r le taux de croissance des proies, K la capacité limite du milieu, le paramètre constant \tilde{e} , appelé le rendement de convection, $\tilde{\alpha}$ représente l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques et \tilde{m} la mortalité naturelle des prédateurs.

Par un changement de variable analogue aux modèles précédents le modèle (3.11) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p(t) = (1 - p^2(t)) p(t) - \alpha f(t) \\ \frac{d}{dt}f(t) = -mf(t) + ep(t)f(t) = ef(t)(p(t) - \rho) \end{cases} \quad (3.12)$$

tel que :

$$\begin{cases} \rho = \frac{m}{e} \\ \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{r\sqrt{K}} \\ m = \frac{2\tilde{m}}{r} \\ e = \frac{2\tilde{\alpha}\sqrt{K}}{r} \end{cases}$$

3.3.1 Les isoclines zéros

Les isoclines verticales

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{\alpha}(1 - p(t)^2)p$$

Les isoclines horizontales

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ ou } p = \rho$$

3.3.2 Les points d'équilibre

Deux cas sont possibles :

* si $\rho > 1 \Rightarrow (0,0), (1,0)$

* si $\rho < 1 \Rightarrow (0,0), (1,0), (p^*, f^*) = (\rho, \frac{1}{a}\rho(1 - \rho^2))$

$$p_1^p = (0,0), \quad p_2^p = (1,0), \quad p_3^p = (p^*, f^*),$$

3.3.3 La stabilité locale des points d'équilibre

La Jacobienne associée au modèle (3.12) est donnée par :

$$J(p, f) = \begin{pmatrix} 1 - 3p^2 & -\alpha \\ ef & e(p - \rho) \end{pmatrix}$$

$$J(p_1^p) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -m < 0 \end{cases}$$

Donc p_1^p est toujours un point selle instable.

$$J(p_2^p) = \begin{pmatrix} -2 & -\alpha \\ 0 & e(1 - \rho) \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = e(1 - \rho) \end{cases}$$

Par conséquence deux cas sont possibles :

- 1 si $\rho > 1 \Rightarrow p_2^p$ est un nœud stable.
- 2 si $\rho < 1 \Rightarrow p_2^p$ est un point selle instable.

Pour l'équilibre de l'intérieur nous avons :

si $\rho < 1$,

$$J(p_3^p) = \begin{pmatrix} 1 - 3(p^*)^2 & -\alpha \\ ef^* & e(p^* - \rho) \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$J(p_3^p) = \begin{pmatrix} 1 - 3(p^*)^2 & -\alpha \\ ef^* & 0 \end{pmatrix}$$

Où le déterminant et la trace sont données par :

$$\begin{cases} \det(p_3^p) = \alpha f^* = e\rho(1 - \rho^2) > 0 \\ \text{tr}(p_3^p) = 1 - 3(p^*)^2 = 1 - 3\rho^2 \end{cases}$$

par conséquence l'équilibre intérieur p_3^p est localement asymptotiquement stable si $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$.

$$\Delta = \text{tr}(p_3^p)^2 - 4\det(p_3^p) = (1 - 3\rho^2)^2 - 4e\rho(1 - \rho^2)$$

Après étude de cette equation en fonction du paramètre ρ nous concluons que :

$$\exists \check{\rho} \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[\text{ tel que :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \rho \in]\check{\rho}, 1[\Rightarrow p_3^p \text{ est un noeud stable. } \textit{Figure 3.12.} \\ \text{pour } \rho \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \check{\rho}[\Rightarrow p_3^p \text{ est un foyer stable. } \textit{Figure 3.13} \end{array} \right.$$

les considérations ci-dessus peuvent être résumées comme suite. L'origine p_1^p est toujours instable, et les résultats pour les équilibres p_2^p et p_3^p donnent plusieurs situations résumées dans **Table 1**.

Table 1

condition	p_2^p	p_3^p	Bifurcation
$\rho > 1$	Asymptotiquement stable	infaible	
$\rho = 1$			Transcritique au $p_2^p = p_3^p$
$\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$	instable	Asymptotiquement stable	
$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$	instable		Hopf
$0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$	instable	instable	

3.3.4 Le comportement du système en termes de ρ

Nous étudions le comportement du système évaluant les ensembles ω -limite du système dynamique en termes de ρ , en dessinant ses isoclines dans le plan de phase.

Le cas $\rho > 1$

L'équilibre sans prédateurs p_2^p , est localement asymptotiquement stable et l'équilibre de la coexistence est infaible car les deux isoclines se croisent dans la partie négative de f .

Soit,

$$f^+ = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}}$$

la valeur maximale de la parabole avec l'équation :

$$p \mapsto f = \frac{1}{\alpha}p(1 - p^2)$$

et l'ensemble T définie par :

$$T = \{(p, f) : \frac{1}{\sqrt{3}} \leq p \leq \rho, f \leq f^+\}$$

Lemme 3.1. *L'ensemble T est positivement invariant.*

démonstration

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} p|_{p=\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \leq f \leq f^+} = \frac{2}{3\sqrt{3}} - \alpha f \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} - \alpha f^+ = 0 \\ \frac{d}{dt} p|_{p=\rho, 0 \leq f \leq f^+} = \rho(1 - \rho^2) - \alpha f \leq \rho(1 - \rho^2) < 0 \text{ car } \rho > 1 \\ \frac{d}{dt} f|_{f=f^+, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq p \leq \rho} = e f^+ (p - \rho) \leq 0 \end{array} \right.$$

en plus la droite avec l'équation $f = 0$ est une isocline donc les trajectoires ne peuvent pas la traverser par conséquence, les trajectoires pénètrent dans T .

Maintenant nous subdivisons le cadran positif en quelques sous-ensembles, qui nous aiderons dans l'analyse. les régions sont définies par :

$$I = \{(p, f) : p \geq \rho\},$$

$$II = \{(p, f) : p \leq \rho, f \geq f^+\},$$

$$III = \{(p, f) : p \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, p(1 - p^2) \leq \alpha f \leq f^+\},$$

$$IV = \{(p, f) : p \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha f \leq p(1 - p^2)\},$$

Ces régions sont représentées graphiquement dans [Figure.3.14](#)

Lemme 3.2. . *A partir de la région I, il existe un certain $t_2 > 0$ tel que la population des proies atteint le niveau $p(t_2) = \rho$. Ainsi les trajectoires provenant de la région I entrent soit dans la région II [Figure.3.14](#) où dans l'ensemble T.*

démonstration

Soit une condition initiale $(p_0, f_0) \in I$ pour la solution de (3.12) donc, $p_0 > \rho > 1$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f = ef(p - \rho) \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq f_0, \forall t > 0 \\ \frac{d}{dt}p = p(1 - p^2) - \alpha f \leq p(1 - p^2) - \alpha f_0 \leq -\alpha f_0 \leq 0 \end{cases}$$

car, $1 - p_0 \leq 0$

par une intégration nous trouvons :

$$p(t) \leq -\alpha f_0 t + p_0. \quad (3.13)$$

Soit t_2 le temps pour lequel $p(t_2) = \rho$ et soit t_1 tel que, $t_1 = \frac{p_0 - \rho}{\alpha f_0}$. Par l'inégalité (3.13) et pour $t = t_1$, nous trouvons :

$$p(t_1) \leq \rho. \quad (3.14)$$

Maintenant deux alternatives sont possibles, soit $p(t) \geq \rho$ pour tout $t \in [0, t_1]$ donc, $p(t_1) \geq \rho$ avec l'inégalité (3.14) nous avons $p(t_1) = \rho$, i.e. nous prenons $t_2 = t_1$. Où, $\exists t^*$ pour lequel $p(t^*) < \rho$ dans ce cas la

continuité de la fonction $p(t)$ assure l'existence d'un certain $t_2 \in [0, t^*]$ tel que $p(t_2) = \rho$. Deux cas sont possibles. Soit $f(t_2) \geq f^+$, ce qui implique que les trajectoires pénètrent dans la région II où, $f(t_2) \leq f^+$ dans ce cas ils pénètrent dans l'ensemble T .

Lemme 3.3. . *A partir de la région II, il existe un certain $t_2 > 0$ tel que la population des prédateurs atteint le niveau $f(t_2) = f^+$. Ainsi les trajectoires provenant de la région II entrent soit dans la région III [Figure.3.14](#) où dans l'ensemble invariant T .*

démonstration

Soit une condition initiale $(p_0, f_0) \in II$ pour la solution de (3.12), donc $p_0 < \rho, f_0 > f^+$ par conséquence :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}p \leq 0 \Rightarrow p(t) \leq p_0, \forall t > 0 \\ \frac{d}{dt}f = ef(p - \rho) \leq ef(p_0 - \rho) = -Cf, C > 0 \end{cases}$$

Donc, par intégration nous trouvons :

$$f(t) \leq f_0 \exp(-Ct) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Ainsi nous utilisons les mêmes démarches du [Lemme3.2](#), il s'en suit qu'il existe un certain $t_2 > 0$, tel que, $f(t_2) = f^+$. En ce moment, soit $f(t_2) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc les trajectoires pénètrent dans l'ensemble T où, $f(t_2) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, dans ce cas les trajectoires entrent dans la région III.

Lemme 3.4. . *Toutes les trajectoires provenant de la région III entrent dans la région IV [Figure.3.14](#).*

démonstration

Considérons une condition initiale $(p_0, f_0) \in III$, $p_0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < \rho$, $p(1 - p^2) < \alpha f_0 \leq f^+$. Pour la solution de (3.15) nous avons $\frac{df}{dt} < 0$. Par conséquence,

$$\frac{d}{dt}f = ef(p - \rho) \leq ef\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \rho\right) = -Kf, K > 0$$

Par intégration nous trouvons :

$$f(t) \leq f_0 \exp(-Kt) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Ainsi, pour chaque $\epsilon > 0$ ils existent deux cas. Soit $\forall t > 0, \alpha f(t) \geq p(t)(1 - p^2(t)) + \epsilon$ donc, $\frac{dp}{dt} < -\epsilon$ par intégration nous trouvons $p(t) \leq -\epsilon t + p_0$ qui conduit à l'existence d'un certain $t^* > 0$ tel que $p(t^*) = 0$. Mais cela est impossible car par le point $(p(t^*), f(t^*)) = (0, f(t^*))$ il y aurait deux trajectoires pour le système, la première à travers le point (p_0, f_0) et l'autre par l'axe $p = 0$, contradiction avec le théorème d'existence et d'unicité. Dans le second cas, $\forall \epsilon > 0$ il existe un $\tilde{t} > 0$ pour lequel $\alpha f(\tilde{t}) - p(\tilde{t})(1 - p^2(\tilde{t})) < \epsilon$ qui implique que, $\alpha f(\tilde{t}) \leq p(\tilde{t})(1 - p^2(\tilde{t}))$ par conséquence $\frac{dp}{dt} \geq 0$ donc, $\exists \bar{t} > 0$ tel que $\alpha f(\bar{t}) = p(\bar{t})(1 - p^2(\bar{t}))$ i.e. Les trajectoires pénètrent dans la région IV.

Lemme 3.5. . Toutes les trajectoires provenant de la région IV entrent dans la région T *Figure.3.14*.

démonstration

Dans cette région, nous avons $p < \frac{1}{\sqrt{3}}, p(1 - p^2) < \alpha f$ en plus :

$$\frac{dp}{dt} \geq 0 \implies p(t) \geq p_0 \forall t > 0$$

$$\frac{df}{dt} \leq 0 \implies f(t) \leq f_0 \forall t > 0$$

$$\frac{dp}{dt} = p(1 - p^2) - \alpha f \geq p(1 - p^2) - \alpha f_0 \geq \frac{2}{3}p - \alpha f_0 \geq \frac{2}{3}p_0 - \alpha f_0 = C, C > 0$$

par une intégration nous avons :

$$p(t) \geq Ct + p_0 \rightarrow +\infty \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Puis que $p_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $p(t)$ continue donc, $\exists t_2 > 0$ tel que $p(t_2) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, i.e. les trajectoires entrent dans l'ensemble T .

Lemme 3.6. . *Aucune orbites fermées dans T .*

démonstration

Soit l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{dp}{dt} \right] + \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{df}{dt} \right] &= \frac{\partial}{\partial p} [(p(1-p^2) - \alpha f)] + \frac{\partial}{\partial f} [ef(p-\rho)] \\ &= 1 - 3p^2 + e(p-\rho) < 0 \end{aligned}$$

Puis que par construction de l'ensemble T nous avons $\rho > p > \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc cette quantité ne change pas de signe sur T . Par le critère négatif de Bendixon il s'en suit que le système (3.12) n'admet aucune orbites fermées dans T .

Par les résultats des Lemme 3.2-3.5 il s'en suit, que toutes les trajectoires sont finalement confinées à l'ensemble T . Par le Lemme 3.6 le système (3.12) n'admet pas d'orbites périodique dans T en plus, p_2^p est l'unique équilibre stable dans T donc, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3. . *Dans le cas $\rho > 1$, p_2^p est globalement asymptotiquement stable.*

Le cas $\rho = 1$

L'isocline verticale $p = \rho$ se déplace vers la gauche quand ρ décroît jusqu'à où $\rho = 1$. A cette valeur les deux isoclines intersectent pour $p_2^p = p_3^p = (1, 0)$ et nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \rho > 1 \Rightarrow p_2^p \text{ stable, } p_3^p \text{ n'existe pas} \\ \text{si } \rho = 1 \Rightarrow p_2^p = p_3^p = (1, 0) \\ \text{si } \rho = 1 \Rightarrow p_2^p \text{ instable, } p_3^p \text{ stable.} \end{array} \right.$$

Par conséquent nous avons une bifurcation transcritique avec le paramètre critique $\rho_c = \rho = 1$.

Le cas $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$

Dans ce cas nous introduisons de nouveau les régions définies par :

$$Ia = \{(p, f) : p \geq 1\},$$

$$Ib = \{(p, f) : \rho \leq p \leq 1, f \geq \bar{f}(p)\},$$

$$II = \{(p, f) : p \leq \rho, f \geq f^+\},$$

$$III = \{(p, f) : p \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, p(1 - p^2) \leq \alpha f \leq f^+\},$$

$$IV = \{(p, f) : p \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha f \leq p(1 - p^2)\},$$

$$VI = \{(p, f) : \frac{1}{\sqrt{3}} \leq p \leq \rho, \alpha f \leq p(1 - p^2)\},$$

$$V = \{(p, f) : \rho \leq p \leq 1, \alpha f \leq p(1 - p^2)\},$$

$$IIb = \{(p, f) : p \leq \rho, p(1 - p^2) \leq \alpha f \leq f^+\}$$

Où, $\bar{f}(p)$ est la trajectoire du système (3.12) passant par le point $(\frac{1}{\sqrt{3}}, f^+)$.

Les régions sont représentées graphiquement dans [Figure.3.16](#)

Lemme 3.7. . *A partir de la région Ia, il existe un certain $t_2 > 0$ tel que la population des proies atteint le niveau $p(t_2) = 1$. Ainsi les trajectoires provenant de la région Ia entrent dans la région Ib [Figure.3.16](#).*

démonstration

Soit une condition initiale $(p_0, f_0) \in Ia$ pour la solution de (3.12) donc, $p_0 > 1 > \rho$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f = ef(p - \rho) \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq f_0, \forall t > 0 \\ \frac{d}{dt}p = p(1 - p^2) - \alpha f \leq p(1 - p^2) - \alpha f_0 \leq -\alpha f_0 \leq 0 \end{cases}$$

car, $1 - p_0 \leq 0$

par une intégration nous trouvons :

$$p(t) \leq -\alpha f_0 t + p_0.$$

Soit t_2 le temps pour lequel $p(t_2) = 1$ et soit t_1 tel que, $t_1 = \frac{p_0 - 1}{\alpha f_0}$.

Par conséquence, soit $p(t) \geq 1$ pour tout $t \in [0, t_1]$ donc, $p(t_1) \geq 1$ nous avons $p(t_1) = 1$, i.e. nous prenons $t_2 = t_1$. Où, $\exists t^*$ pour lequel $p(t^*) < 1$ dans ce cas la continuité de la fonction $p(t)$ assure l'existence d'un certain $t_2 \in [0, t^*]$ tel que $p(t_2) = 1$. Donc les trajectoires pénètrent dans l'ensemble Ib .

Nous construisons maintenant un ensemble positivement invariant. Mais pour cette tâche, nous devons intégrer vers l'arrière, donc, on prends $t = -s$ et $\bar{p}(s) = p(-t)$, $\bar{f}(s) = f(-t)$, le système (3.12) devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{p}(s) = \alpha \bar{f}(s) - (1 - \bar{p}^2(s)) \bar{p}(s) \\ \frac{d}{dt}\bar{f}(s) = e \bar{f}(s) (\rho - \bar{p}(s)) \end{cases} \quad (3.15)$$

Lemme 3.8. *En se déplaçant vers l'arrière, la trajectoire commençant à $(p_0, f_0) = (\rho, f^+)$ dans un temps fini soit elle rencontre la ligne verticale $\bar{p} = 1$ au niveau $\bar{f} = f^-$, où elle entre dans la région V Figure.3.16.*

démonstration

Soit une condition initiale $(\bar{p}_0, \bar{f}_0) = (\rho, f^+)$ pour la solution du système (3.15) dans ce cas nous avons $\rho \leq \bar{p} < 1$ donc :

$$\frac{d}{dt}\bar{f}(s) \leq 0 \Rightarrow \bar{f}(s) \leq \bar{f}_0$$

Nous avons deux cas possibles :

- * Soit $\exists s^* > 0$ tel que $\bar{f}(s^*) = \alpha \bar{f}(s^*) - (1 - \bar{p}^2(s^*)) \bar{p}(s^*)$ par conséquence, le trajectoire entre dans la région V .
- * Soit $\bar{f} - \bar{p}(1 - \bar{p}^2) > L$, pour $L > 0$ arbitraire dans ce cas nous avons $\frac{d}{dt} \bar{p}(s) > L$, par intégration $\bar{p}(t) \geq Ls + \bar{p}_0$ puis que $\bar{p}(s)$ est continue en plus $\rho \leq \bar{p} < 1$ donc, $\exists s_1$ pour laquelle $\bar{p}(s_1) \geq 1$ où, $f^- = \bar{f}(s_1)$

Dans ce dernier cas il s'en suit que l'ensemble positivement invariant noté par E_1 peut être construit en prenant l'axe de p pour $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p \leq 1$, la ligne verticale $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, jusqu'à la hauteur f^+ , et $p = 1$ à la hauteur f^- , le segment horizontal à la hauteur $f = f^+$ pour $\frac{1}{\sqrt{3}} < p < \rho$, et la trajectoire reliant les deux points $(\rho, f^+), (1, f^-)$.

Lemme 3.9. *En se déplaçant vers l'arrière, la trajectoire entrant dans la région V du Lemme 3.8 pénètre dans la région VI en temps fini Figure 3.16.*

démonstration

Dans la région V nous avons $\forall s > 0$, $\bar{p}(s) - \rho > H$ pour certains $H > 0$, par suite :

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = e\bar{f}(\rho - \bar{p}) < -eH\bar{f}$$

donc :

$$\bar{f}(s) \leq \bar{f}_0 \exp(-eHs)$$

par conséquence,

$$\frac{d\bar{p}}{dt} \leq \alpha \bar{f}_0 \exp(-eHs) - \bar{p}(1 - \bar{p}^2) \leq \alpha \bar{f}_0 \exp(-eHs) - \rho(1 - \bar{p}_0^2)$$

car $\bar{p} > \rho, 1 - \bar{p} > 1 - \bar{p}_0$

Par une intégration nous trouvons :

$$\bar{p}(s) \leq -\alpha \frac{\bar{f}_0}{eH} \exp(-eHs) - \rho(1 - \bar{p}_0^2)s + \bar{p}_0$$

il est clair que $\bar{p}(s)$ tend vers $-\infty$ pour $s \rightarrow +\infty$, en plus $\bar{p}(s)$ est continue, $\bar{p}_0 > \rho$ donc, $\exists \hat{s} > 0$ tel que, $\bar{p}(\hat{s}) \leq \rho$, i.e, la trajectoire pénètre dans la région VI.

Lemme 3.10. *En déplaçant vers l'arrière, la trajectoire entrant dans la région VI du Lemme 3.9 soit elle rencontre la ligne verticale $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ au niveau $f = f_+$, où elle pénètre dans la région IIb Figure.3.16.*

démonstration

Dans cette région, comme $\bar{p}' < 0$, alors deux cas sont possibles :

- * Soit $\forall s > 0$ et pour un certain $M > 0$, $\bar{p}(s) \geq \frac{1}{\sqrt{3}} + M$, et puisque $\bar{f}' = e\bar{f}(\rho - \bar{p}) > e\bar{f}(\rho - \bar{p}_0) = Nf > 0$ donc $\exists \tilde{s} > 0$ tel que :

$$\bar{f}(\tilde{s}) \geq \bar{f}_0 \exp(N\tilde{s}) \geq \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}} = \max\left(\frac{1}{\alpha}\bar{p}(1 - \bar{p})\right)$$

En d'autres termes \bar{f} croît ou, il existe un certain $s_* > 0$ tel que $\bar{f}(s_*) = \frac{1}{\alpha}\bar{p}(s_*)(1 - \bar{p}^2(s_*))$, pour lequel $\bar{p}'(s_*) = 0$ donc, la trajectoire pénètre dans la région IIb.

- * Soit $\exists s_2 > 0$ tel que $\bar{p}(s_2) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ par conséquence la trajectoire rencontre la ligne verticale $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans ce cas, nous pouvons définir l'ensemble invariant noté par E_2 , en considérant le segment $f = f^+$ entre les lignes $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $p = \rho$, la trajectoire construite à partir du point (ρ, f^+) rejoignent le point $(\frac{1}{\sqrt{3}}, f_+)$, le segment verticale $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ entre $f = f^+$ et $f = f_+$ voir Figure.3.18.

Remarque

Par le même principe nous pouvons continuer cette procédure pour construire d'autres ensembles positivement invariants (E_3, E_4).

Lemme 3.11. *Dans les ensembles positivement invariants E_1, E_2, E_3 , où E_4 , aucune orbite périodique n'existe.*

démonstration

Ici nous prenons la fonction $\chi(p, f) = \frac{1}{f}$, et calculons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \left[\chi(p, f) \frac{dp}{dt} \right] + \frac{\partial}{\partial f} \left[\chi(p, f) \frac{df}{dt} \right] &= \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{p}{f} (1 - p^2) - \alpha \right] + \frac{\partial}{\partial f} [e(p - \rho)] \\ &= \frac{1}{f} (1 - 3p^2) < 0 \end{aligned}$$

Car nous avons $p > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Par le critère de Dulac le système (3.12) ne possède aucune orbite fermée dans E_i , $i = 1, 2, 3, 4$ et puisque p_3^p est l'unique équilibre localement asymptotiquement stable dans E_i donc forcément il est globalement asymptotiquement stable.

Théorème 3.4. *Dans le cas $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$, p_3^p est globalement asymptotiquement stable.*

Le cas $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$

On a vu précédemment que la Jacobienne au point p_3^p vérifiée :

$$J(p_3^p) = \begin{pmatrix} 1 - 3\rho^2 & -\alpha \\ \frac{e}{\alpha}\rho(1 - \rho^2) & 0 \end{pmatrix}$$

où,

$$\begin{cases} \det(p_3^p) = e\rho(1 - \rho^2) > 0 \\ \text{tr}(p_3^p) = 1 - 3\rho^2 \end{cases}$$

Donc le déterminant est toujours positif mais la trace changer de signe en plus :

$$P_J(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(1 - 3\rho^2) + e\rho(1 - \rho^2)$$

Tel que $P_J(\lambda)$ est le polynôme caractéristique associé a la matrice $J(p_3^p)$

$$P_f(\lambda) = 0 \Rightarrow \Delta = (1 - 3\rho^2)^2 - 4e\rho(1 - \rho^2)$$

Donc $\exists \rho_* < 1$ tel que, $\forall \rho < \rho_*$, $\Delta < 0$.

Dont les racines est données par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - 3\rho^2}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha(\rho) = \frac{1 - 3\rho^2}{2} \\ \beta(\rho) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \end{cases}$$

Pour $\rho = \rho_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nous avons :

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\ \beta\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}} \neq 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{3}} < 0 \end{cases}$$

Alors :

- 1 $\rho = \rho_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est la valeur de bifurcation de Hopf.
- 2 $\exists \rho_2 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ tel que pour tout $\rho \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \rho_2[$ p_3^p est un foyer stable.
- 3 Pour tout voisinage U de p_3^p , il existe $\rho_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ tel que pour tout $\rho \in [\rho_1, \frac{1}{\sqrt{3}}[$, p_3^p est un foyer instable entouré par un cycle limite stable contenu dans U .

Pour montrer que le cycle limite est stable on va utiliser l'indice de Marsden MacCraken et avant de commencer nous allons ramener l'équilibre p_3^p à l'origine.

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x(t) = p(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y(t) = f(t) - \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}} \end{cases}$$

Le système (3.12) devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \left(x(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) - \alpha \left(y + \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}}\right) \\ \frac{d}{dt}y(t) = e\alpha \left(y + \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

Donc :

$$A = J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \frac{2e}{3\alpha\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & +\alpha \\ \sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}} & 0 \end{pmatrix}$$

Où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2e}} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}} \\ -\sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}} & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\mu^* = \sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}}$$

Le système (3.12) s'écrit donc dans la nouvelle base de coordonnées (u, v) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = e\alpha \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2e}} \left(\sqrt{\frac{2e}{3\sqrt{3}}}u + \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}}\right) v = h(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\alpha} \left(\alpha v + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \left(\alpha v + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) - \left(\frac{2e}{3\sqrt{3}}u + \frac{2}{3\alpha\sqrt{3}}\right) = K(u, v) \end{cases}$$

Finalemment l'indice de Marsden MacCraken est donné par :

$$\begin{aligned} I &= \mu^* (h_{uuu} + h_{uvv} + K_{uuv} + K_{vvv}) \\ &\quad + (h_{uu}K_{uu} - h_{uu}h_{uu} + K_{uu}K_{uv} + K_{uu}K_{uv} - h_{vv}h_{uv} - h_{vv}K_{vv}) \\ &= -6\alpha^2 \frac{2e}{3\sqrt{3}} < 0 \end{aligned}$$

Donc, l'équilibre p_3^p est un foyer stable pour $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et le cycle limite est stable (bifurcation de Hopf super-critique).

Le cas $0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ici nous devons également définir deux régions supplémentaires. Soit $\tilde{f}(p)$ la trajectoire de système à travers le point $(1, h)$, avec $h \geq f^+$, cette trajectoire atteint la ligne verticale $p = \rho$ à la hauteur h^* , i.e. au point (ρ, h^*) .

$$Ia = \{(p, f) : p \geq 1\},$$

$$IIa = \{(p, f) : \rho \leq p \leq 1, f \geq \tilde{f}(p)\},$$

$$IIc = \{(p, f) : p \leq \rho, f \geq h^*\},$$

Les régions sont représentées graphiquement dans les figures à la fin du chapitre

Maintenant, nous construisons un ensemble positivement invariant Σ pour cela nous commençons par la ligne verticale $p = 1$ jusqu'à un certain point avec la hauteur $h \geq f^+$, à partir de là, nous suivons la trajectoire avec la condition initiale $(1, h)$ jusqu'à où il intersect avec l'isocline vertical $p = \rho$ dans un point noter par (ρ, h^*) . Pour compléter Σ , nous prenons la ligne horizontale $f = h^*$ de cette interception jusqu'à l'axe vertical ainsi que les deux segments sur les axes de coordonnées.

Lemme 3.12. *à partir de la région Ia les trajectoires pénètrent soit dans l'ensemble Σ où dans la région IIa.*

démonstration

Soit $(p_0, f_0) \in Ia$ alors, $p_0 > 1 > \rho$.

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = ef(p - \rho) \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq f_0 \forall t > 0 \\ \frac{dp}{dt} = p(1 - p^2) - \alpha f \leq -\alpha f \leq -\alpha f_0 \end{cases}$$

Car $1 - p < 0$, par intégration nous trouvons :

$$p(t) \leq -\alpha f_0 t + p_0$$

Puisque $p(t)$ est continu, $p_0 > 1$ alors, $\exists t_* > 0$ tel que $p(t_*) \leq 1$.
Donc soit $f(t_*) < h$, les trajectoires entrent dans Σ , où $f(t_*) > h$ dans ce cas les trajectoires pénètrent dans la région *Ila*.

Lemme 3.13. *De la région *Ila* les trajectoires pénètrent dans la région *Iic*.*

démonstration

Soit $(p_0, f_0) \in \text{Ila}$ donc, $\rho < p_0 < 1$, $f_0 > \tilde{f}(p)$ par conséquence nous avons :

Pour un certain $C > 0$, $p(t) - \rho > C \forall t > 0$ par suite :

$$\frac{df}{dt} = ef(p - \rho) > ef_0(p - \rho) > ef_0 C = Q$$

donc, $f(t) \geq Qt + f_0$.

$$\frac{dp}{dt} = p(1 - p^2) - \alpha f < p(1 - p^2) - Qat - \alpha f_0 < p_0(1 + p_0) - Qat - \alpha f_0$$

Car $1 - p < 1$, $p(t) < p_0$. Par une intégration nous trouvons :

$$p(t) \leq -\frac{Q\alpha}{2}t^2 - (\alpha f_0 - p_0(1 + p_0))t + p_0$$

Pour $t \rightarrow +\infty$, $-\frac{Q\alpha}{2}t^2 - (\alpha f_0 + p_0(1 + p_0))t + p_0 \rightarrow -\infty$ de plus, $p_0 > \rho$, donc il existe un certain $\tilde{t} > 0$ tel que, $p(\tilde{t}) \leq \rho$, i.e. les trajectoires entrent dans la région *Iic*.

Lemme 3.14. *De la région *Iic* les trajectoires pénètrent dans l'ensemble Σ .*

démonstration

Dans la région IIC nous avons, $\frac{dp}{dt} < 0$ et $\frac{df}{dt} < 0$, donc $p(t) < p_0, f(t) < f_0, \forall t > 0$, soit $p_0 < \rho$ alors :

$$\frac{df}{dt} = ef(p - \rho) < ef(p_0 - \rho) < ef_0(p_0 - \rho) = -R, R > 0$$

$$f(t) \leq -Rt + f_0$$

Donc, il existe $\hat{t} > 0$ tel que, $f(\hat{t}) \leq h^*$, i.e. pour $(p_0, f_0) \in IIC$ les trajectoires pénètrent dans Σ .

Lemme 3.15. *L'ensemble Σ est positivement invariant.*

démonstration

$$\left. \frac{d}{dt} p \right|_{p=1, 0 \leq f \leq h} = -\alpha f \leq 0$$

Donc, sur la ligne verticale $p = 1$ le champs entre dans Σ , l'isocline $f = 0$ et la trajectoire qui joint les deux points $(1, h)$ et (ρ, h^*) ne peut pas être traversée donc, Σ est positivement invariant.

Par les **Lemmes 3.12-3.15** nous avons :

Théorème 3.5. *L'ensemble Σ contient toute trajectoire possible du système.*

Finalement, puisque pour $0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$ l'équilibre $p_3^p \in \Sigma$ est instable, Σ est positivement invariant alors, par le théorème de Poincaré-Bendixson il existe au moins un cycle limite inclus entièrement dans Σ .

Théorème 3.6. *Pour $0 < \rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$ le système (3.12) possède un cycle limite .*

Remarque

Par les **théorèmes 3.5-3.6** Tout les trajectoires du système sont attirées par ce cycle limite.

3.4 CONCLUSION

De nouveaux modèles de populations en interactions dans lesquels l'une des deux populations présente une sorte de comportement social ont été présentés. Cette socialisation est exprimée par le fait qu'ils vivent dans des troupeaux, et l'influence de la seconde population est ressentie par les individus qui prennent des positions sur le bord du troupeau ; quatre interactions démographiques basiques ont été considérées, correspondant aux mutualisme, mutualisme obligé, le cas de compétition et interaction proie-prédateur. Malgré la simplicité du modèle, en effet c'est juste un système de deux équations différentielles ordinaires, mais nous avons découvert de nouvelles caractéristiques inattendues dans chaque modèle par rapport aux modèles classiques.

Pour le nouveau modèle symbiotique, les résultats sont similaires par rapport au modèle classique avec seulement un changement dans l'équilibre de la coexistence et une remarque très importante est à faire ; dans le modèle classique nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il existe une situation dont laquelle les deux populations tendent vers l'infini. Mathématiquement ce résultat est acceptable mais du point de vue biologique cette situation est irréaliste contrairement au nouveau modèle, où dans tous les cas les deux densités tendent vers un équilibre intérieur du cadran positif (l'équilibre de la coexistence).

Dans le cas de compétition, nous observons que les équilibres limites ne sont pas affectés, ils sont les mêmes que ceux du cas classique. Cependant, il y a un cas où l'équilibre de la coexistence présente un nouveau comportement. Il se produit pour ($m > 1$) et quand la condition $\bar{p}^3 \geq \frac{1}{2}\alpha$ est satisfaite. Dans ce cas, il devient un équilibre double. Celui de droite est stable et celui gauche instable **Figure.3.11**. Donc si la condition initiale se trouve au-dessous du point d'équilibre intérieur instable les trajectoires du système tendent vers l'équilibre p_3^p , où seulement la population f survit. Mais si la condition initiale (p_0, f_0) se trouve au-dessus du point alors, l'autre équilibre d'intérieur est atteint, où les deux populations coexistent. Ainsi, le comportement grégaire, qui constitue prétendument une meilleure défense pour la population sociale, est en fait, plutôt bénéf-

fique à l'autre population qui montre un comportement plus individualiste, en évitant sa disparition. Cela représente une nouveauté, un résultat non intuitif.

Enfin, contrairement à ce qui se passe dans le modèle proie-prédateur classique, qui représente soit des trajectoires fermées (oscillations centrales), lorsque le modèle de Lotka-Volterra avec croissance linéaire est considéré, où qui ne possède que des équilibres globalement stables, pour le cas du modèle avec la croissance logistique où les interaction entre les deux population sont de type quadratique. Le comportement du nouveau système proie-prédateur est caractérisé par un paramètre clé unique ρ . Ce paramètre capture la totalité de la dynamique du système, en exprimant les différentes situations que le modèle permet. Notons qu'un "grand" ρ est obtenu soit pour des valeurs élevées de la mortalité du prédateur m ou un faible rendement de conversion e . En fait, pour $\rho > 1$ la population des prédateurs disparaît, pour $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$ les proies et les prédateurs coexistent à des niveaux stables. Pour $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}$ une bifurcation se produit, avec l'apparition de cycles limites stables ; à partir de cette valeur et quand le paramètre ρ décroît le système possède des cycles limites stables, ainsi dans le modèle proposé, la coexistence des proies et des prédateurs peut également être assurée par des oscillations stables soutenues, déclenchées par des valeurs convenables de ρ voir [Table 1](#).

Bien que la construction explicite d'une fonction de Lyapunov n'a pas été possible, nous avons aussi montré la stabilité globale pour les équilibres de coexistence du modèle symbiotique, et pour deux cas du modèle proie-prédateur, $\rho > 1$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} < \rho < 1$.

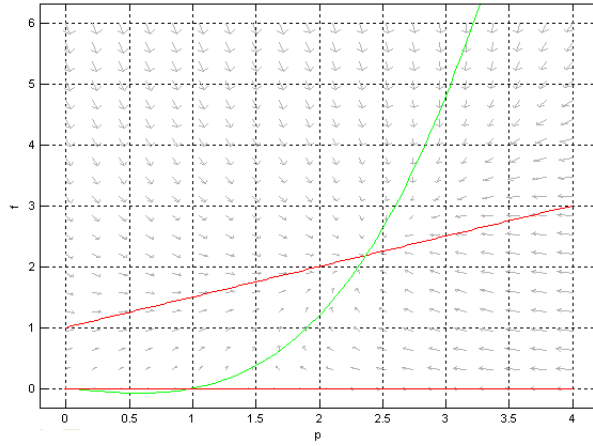


FIGURE 3.1 – Direction des vecteurs vitesse pour le modèle (3.3).

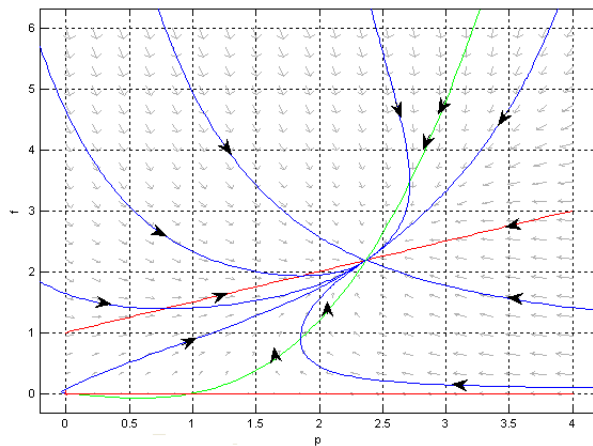


FIGURE 3.2 – Portrait de phase du modèle (3.3). Les deux populations coexistent, $\alpha = 5, m = 6, e = 3$.

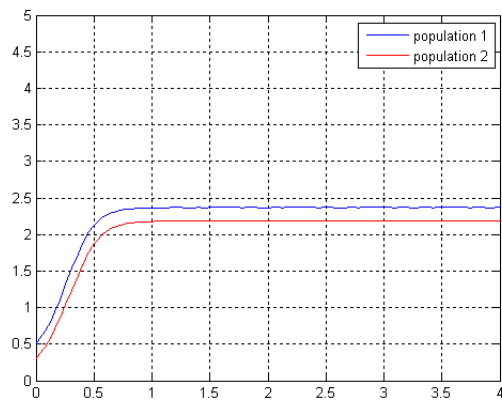


FIGURE 3.3 – chroniques de croissance de deux populations, $\alpha = 5, m = 6, e = 3$.



FIGURE 3.4 – La pollinisation des plantes par les abeilles.

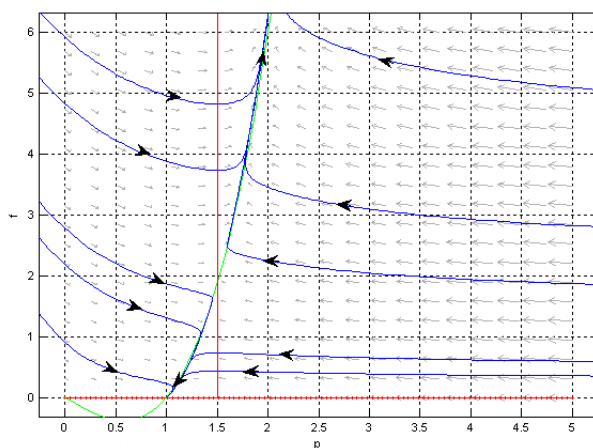


FIGURE 3.5 – Portrait de phase du modèle (3.7) pour les paramètres $m = 1.5, e = 1$ ce qui implique $\rho = 1.5$.

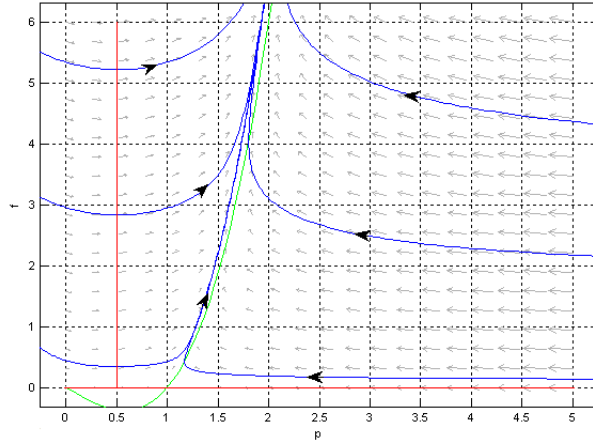


FIGURE 3.6 – Portrait de phase du modèle (3.7) pour les paramètres $m = 0.5, e = 1$ ce qui implique $\rho = 0.5$.

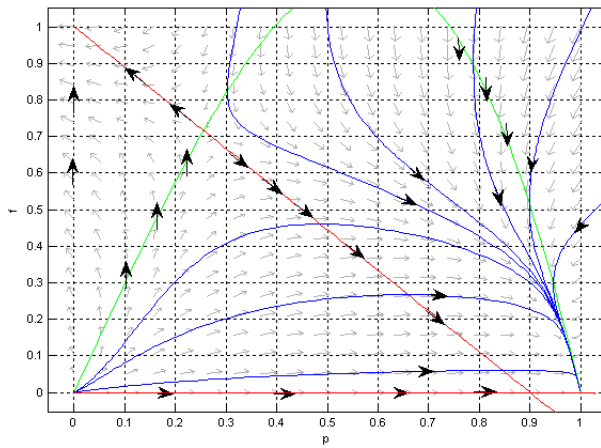


FIGURE 3.7 – Portrait de phase du modèle (3.9) pour les paramètres $\alpha = \frac{1}{3}, m = 0.9, e = 1$ ce qui implique que $\rho = 0.9, (\tilde{p}_2, \tilde{f}_2)$ est infaisable, $\tilde{p}_2 > \rho$. La figure montre une bistabilité avec les équilibres p_2^c et p_3^c .

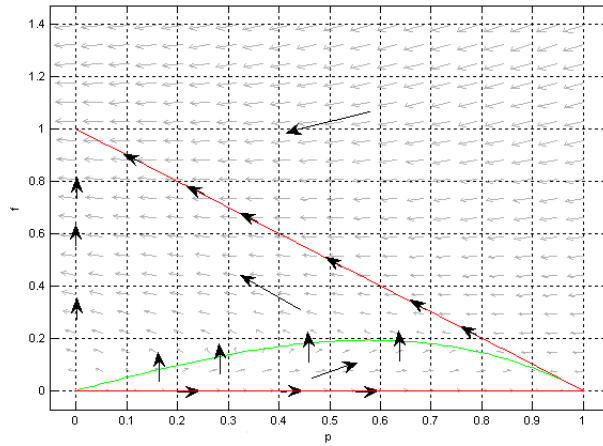


FIGURE 3.8 – Portrait de phase du modèle (3.9) pour les paramètres $\alpha = 2, m = 1, e = 1$ ce qui implique que $\rho = 1$

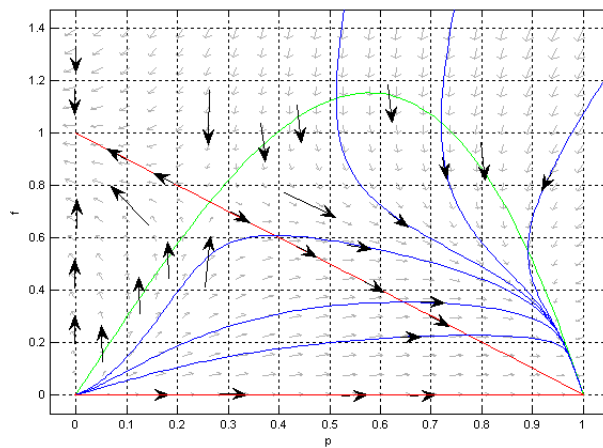


FIGURE 3.9 – Portrait de phase du modèle (3.9) pour les paramètres $\alpha = \frac{1}{3}, m = 1, e = 1$, pour $\rho = 1$

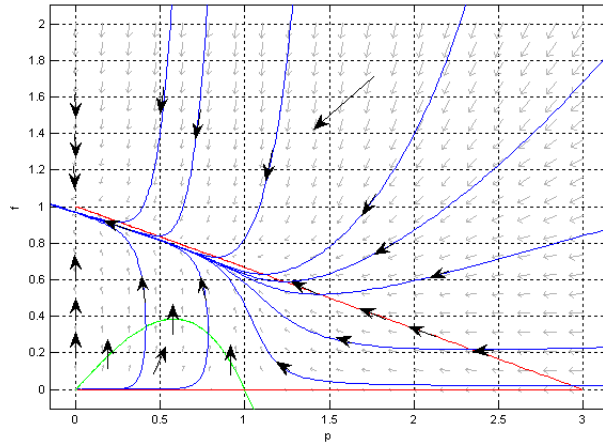


FIGURE 3.10 – Portrait de phase du modèle (3.9) pour les paramètres $\alpha = 1, m = 9, e = 3$, i.e $\rho = 3$ où, $\bar{p}^3 < \frac{1}{2}\alpha$ tel que $\bar{p} = \frac{2}{3}$ par conséquence, $\bar{p}^3 = \frac{8}{27} < \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\alpha$.

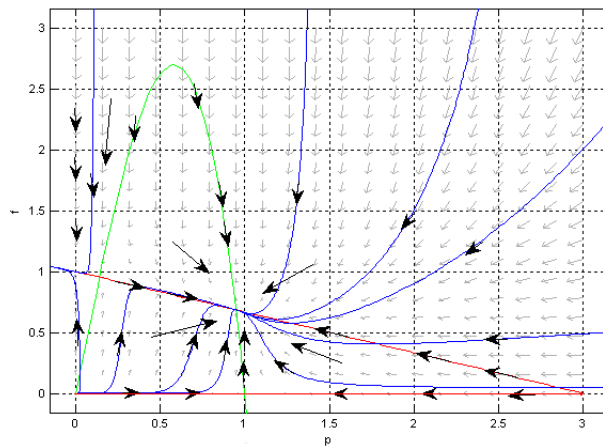


FIGURE 3.11 – Portrait de phase du modèle (3.9) avec, deux équilibres d'intérieur $(\tilde{p}_1, \tilde{f}_1)$ et $(\tilde{p}_2, \tilde{f}_2)$, $\alpha = \frac{1}{7}, m = 9, e = 3$, i.e $\rho = 3$ où, $\bar{p}^3 > \frac{1}{2}\alpha$ tel que $\bar{p} = \frac{22}{63}$ par conséquence, $\bar{p}^3 = 0.2064 > 0.0714 = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{14}$.

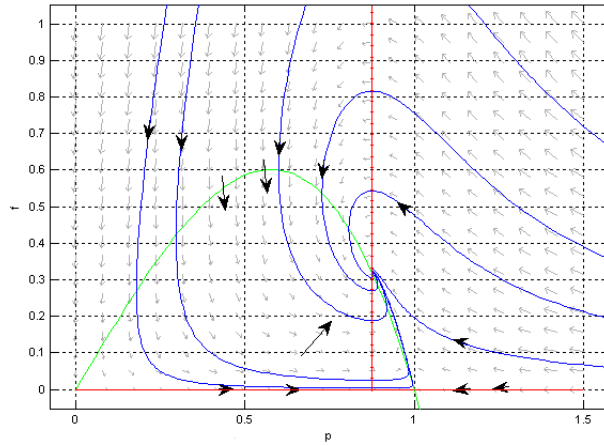


FIGURE 3.12 – Portrait de phase du modèle (3.12), $\alpha = 0.64, m = 3.5, e = 4$.

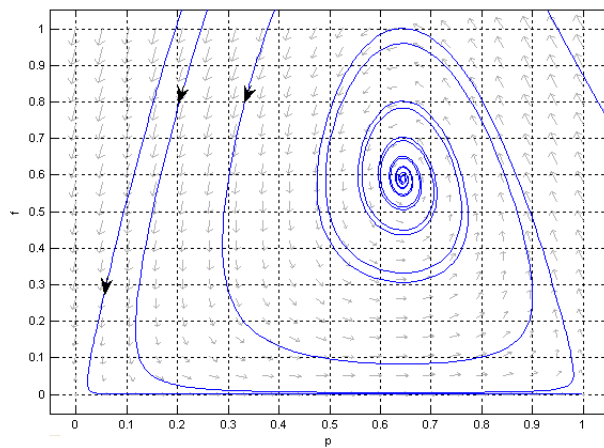


FIGURE 3.13 – Portrait de phase du modèle (3.12), $\alpha = 0.64, m = 2.9, e = 4.5$.

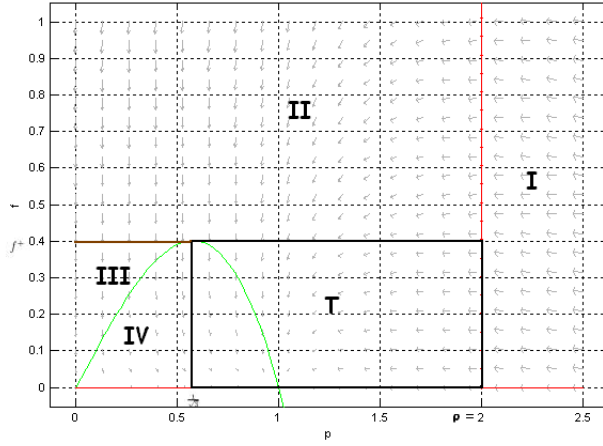


FIGURE 3.14 – L'ensemble T et les régions $I - IV$.

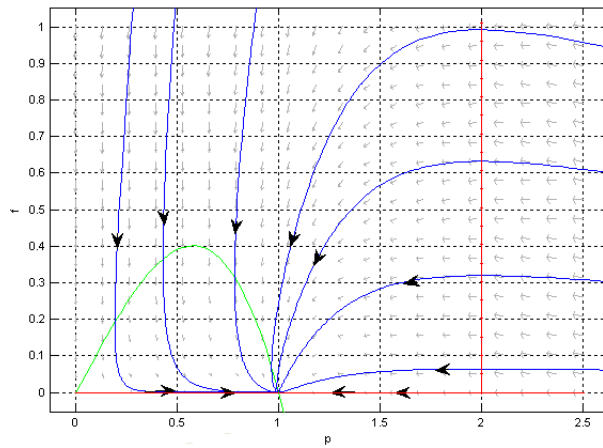


FIGURE 3.15 – Portrait de phase du modèle (3.12), $\alpha = 0.96, m = 6, e = 3$.

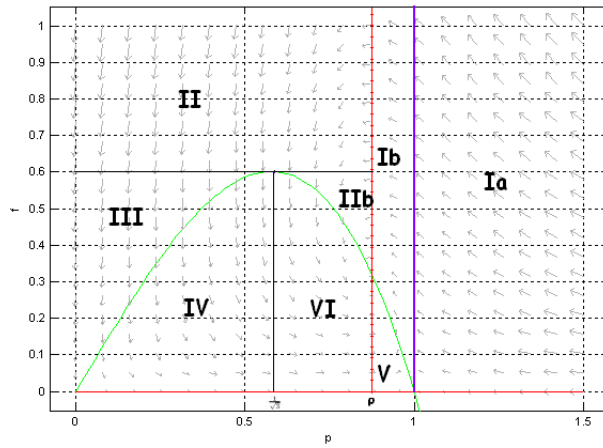


FIGURE 3.16 – Modèle (3.15). Régions Ia, Ib, II, IIb, III, IV, V, VI .

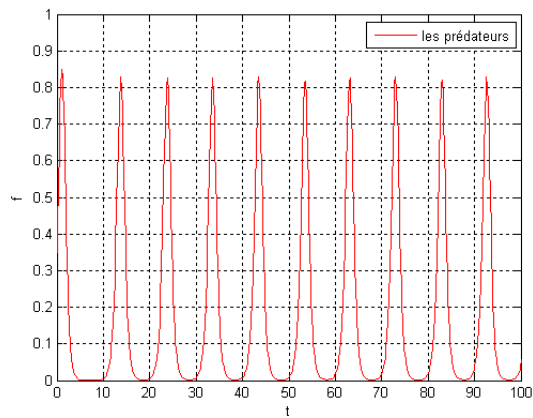


FIGURE 3.29 – La densité des prédateurs en fonction du temps avec, $\alpha = 1, m = 2, e = 3.74$ où, $\rho = 0.5348$ et, $f_0 = 0.35$.

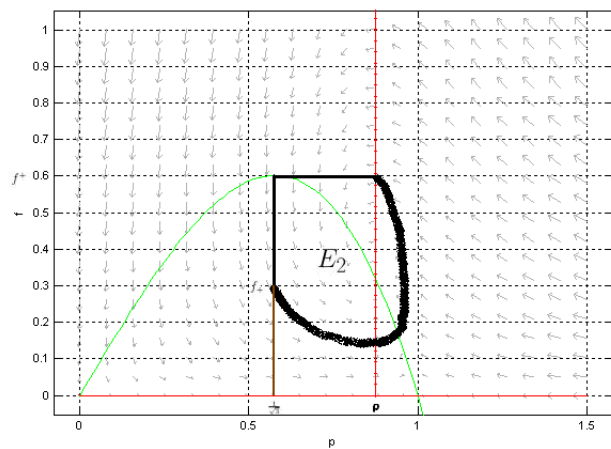


FIGURE 3.18 – L'ensemble invariant E_2 .

MODÈLE ÉCO-ÉPIDÉMIOLOGIQUE

AVEC UN COMPORTEMENT

GRÉGAIRE

Ce chapitre représente une lecture détaillée des articles [3, 5, 7]. Nous considérons un modèle éco - épidémiologique, dans une interaction proie-prédateur en présence d'une infection. Ainsi, l'influence du comportement du troupeau sur l'incidence de la maladie représente notre nouvelle hypothèse. Trois cas seront étudiés, la maladie est soit inoffensive ou nuisible pour le prédateur, soit aucune prédation de proies infectées n'est faite, les prédateurs ressentant la présence d'une pathologie ne s'attaquent pas à des proies malades. Dans ces trois cas, nous observons la présence de la bifurcation transcritique. En plus dans le cas nuisible, une bifurcation de Hopf est constatée.

4.1 L'ÉPIDÉMIE EST INOFFENSIVE POUR LES PRÉDATEURS

Dans l'approche éco-épidémique, la principale différence avec le modèle démographique classique consiste dans le fait que la population de proies est répartie entre infectés I (se rassemblent en troupeaux) et susceptibles S . Nous supposons également, la présence d'une troisième population P qui représente le prédateur dans l'écosystème. En plus, la prédation se produit toujours à la frontière du troupeau des infectés. Mais l'effet de cette prédation sur les individus infectés peut avoir des résultats différents pour les prédateurs.

Le comportement du rassemblement de groupe est modélisé comme précédemment par la racine carrée de la densité de la population infectée \sqrt{I} . La transmission de la maladie se produit à travers des contacts entre les infectés et les susceptibles sur la frontière du troupeau. le terme "d'action de masse" (modifié) dans cette situation prend la forme $S\sqrt{I}$. Les infectés ne se reproduisent pas, ils sont trop faibles pour exercer une compétition intraspécifique sur les individus sains S en plus les individus sains ne ressentent pas leur pression dans la recherche des ressources. Nous proposons également que les prédateurs ne disposent pas d'autres sources de nourriture. Pour les individus sains S , les rencontres avec les prédateurs P sont exprimées par la loi d'action de masse habituelle, c-à-d PS .

Dans ce cas, le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} P' = -mP + \alpha PS + bP\sqrt{I} \\ S' = -\beta S\sqrt{I} + rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha PS \\ I' = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} \end{cases} \quad (4.1)$$

Tous les paramètres sont supposés positifs et représentent :

P : la densité des prédateurs.

S et I : les densités des proies saines et infectés respectivement.

m : le taux de mortalité naturelle des prédateurs.

α et b : représentent les taux de prédation par rapport au proies saines et infectées respectivement.

β : le taux d'infection.

r : le taux de reproduction des proies saines

K : la capacité limite du milieu pour les proies susceptibles.

μ : le taux de mortalité pour les proies infectées.

A cause de la singularité au niveau de la matrice Jacobienne, nous allons procéder à un changement de variable suivant :

$$U = \sqrt{I}$$

Donc, le modèle est écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P' = p(-m + \alpha S + bU) \\ S' = S(-\beta U + r(1 - \frac{S}{K}) - \alpha P) \\ U' = \frac{1}{2}(-\mu U + \beta S - bP) \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.1 Équilibres et leur analyse

les points d'équilibre associés au modèle (4.2) sont donnés par :

$E_0 = (0, 0, 0)$, l'équilibre sans prédateurs $E_1 = (0, \frac{rK\mu}{\beta^2 K + r\mu}, \frac{rK\beta}{\beta^2 K + r\mu})$, et l'équilibre de la coexistence $\hat{E}_* = (\hat{P}_*, \hat{S}_*, \hat{U}_*)$, tel que :

$$\begin{cases} \hat{P}_* = \frac{bKr\beta + \alpha Kr\mu - mr\mu - Km\beta^2}{\alpha^2 K\mu + b^2 r} \\ \hat{S}_* = K \frac{\alpha m\mu + b^2 r - bm\beta}{\alpha^2 K\mu + b^2 r} \\ \hat{U}_* = \frac{bmr + \alpha Km\beta - \alpha bKr}{\alpha^2 K\mu + b^2 r} \end{cases}$$

Avec les conditions de faisabilité données par :

$$\begin{cases} Kr(b\beta + \alpha\mu) \geq m(\beta^2 K + r\mu) \\ \alpha m\mu + b^2 r \geq bm\beta \\ bmr + \alpha Km\beta \geq \alpha bKr \end{cases} \quad (4.3)$$

La matrice Jacobienne associée au modèle (4.2) est :

$$J = \begin{pmatrix} -m + \alpha S + bU & \alpha P & bP \\ -\alpha S & -\beta U + r - 2\frac{r}{K}S - \alpha P & -\beta S \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Où, les valeurs propres sont $-m, r, -\frac{1}{2}\mu$, ce qui implique que l'origine est toujours instable.

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -m + \alpha S_1 + bU_1 & 0 & 0 \\ -\alpha S_1 & -\frac{r}{K}S_1 & -\beta S_1 \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Car,

$$-\beta U_1 + r \left(1 - \frac{S_1}{K}\right) - \alpha p_1 = 0$$

La première valeur propre est donnée par $\lambda_1 = -m + \alpha S_1 + bU_1$ et les deux autres valeurs provient de la matrice B donnée par :

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}S_1 & -\beta S_1 \\ \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

dont le déterminant et la trace sont données par :

$$\begin{cases} \det(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{r\mu}{K} + \beta^2 \right) S_1 > 0 \\ \text{tr}(B) = -\left(\frac{r}{K}S_1 + \frac{1}{2}\mu \right) < 0 \end{cases}$$

par conséquent, deux cas sont possible :

- 1)- si $\alpha S_1 + bU_1 = m_1 < m$, alors E_1 est localement asymptotiquement stable [Figure.4.1](#).
- 2)- si $\alpha S_1 + bU_1 = m_1 > m$, dans ce cas $\lambda_1 > 0$ donc, E_1 est instable.

En ce qui concerne l'équilibre de la coexistence \hat{E}_* , nous allons imposer les condition de faisabilité (4.3) donc :

$$J(\hat{E}_*) = \begin{pmatrix} -m + \alpha\hat{S}_* + b\hat{U}_* & \alpha\hat{P}_* & b\hat{P}_* \\ -\alpha\hat{S}_* & -\beta\hat{U}_* + r - 2\frac{r}{K}\hat{S}_* - \alpha\hat{P}_* & -\beta\hat{S}_* \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Puisque,

$$\begin{cases} -m + \alpha\hat{S}_* + b\hat{U}_* = 0 \\ -\beta\hat{U}_* + r \left(1 - \frac{\hat{S}_*}{K}\right) - \alpha\hat{P}_* = 0 \end{cases}$$

donc, la matrice $J(\hat{E}_*)$ est écrite :

$$J(\hat{E}_*) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\hat{P}_* & b\hat{P}_* \\ -\alpha\hat{S}_* & -\frac{r}{K}\hat{S}_* & -\beta\hat{S}_* \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

$$J(\hat{E}_* - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha\hat{P}_* & b\hat{P}_* \\ -\alpha\hat{S}_* & -\frac{r}{K}\hat{S}_* - \lambda & -\beta\hat{S}_* \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu - \lambda \end{pmatrix}$$

Donc, le polynôme caractéristique associé à la matrice $J(\hat{E}_*)$ est donné par :

$$P_{J(\hat{E}_*)}(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r}{K}\hat{S}_* + \frac{1}{2}\mu \\ a_2 = \alpha^2\hat{S}_*\hat{P}_* + \frac{1}{2}(b^2\hat{P}_* + (\frac{r}{K}\mu + \beta^2)\hat{S}_*) \\ a_3 = \frac{1}{2}(\alpha^2\mu + b^2\frac{r}{K})\hat{S}_*\hat{P}_* \end{cases}$$

Pour vérifier la stabilité locale d'équilibre \hat{E}_* nous allons utiliser le critère de Routh Hurwitz et puisque nous sommes en dimension 3 il suffit de vérifier les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1a_2 - a_3 > 0 \\ a_3 > 0 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{r}{K}\hat{S}_* + \frac{1}{2}\mu > 0$$

$$a_1a_2 - a_3 = \frac{\mu}{4}\left(\frac{r\mu}{K}\hat{S}_* + \beta^2\hat{S}_* + b^2\hat{P}_*\right) + \frac{r}{K}\hat{S}_*^2\left(\alpha^2\hat{P}_* + \frac{r\mu}{2K} + \frac{1}{2}\beta^2\right) > 0$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha^2\mu + b^2\frac{r}{K}\right)\hat{S}_*\hat{P}_* > 0$$

Et ainsi \hat{E}_* est localement asymptotiquement stable dès qu'il existe **Figure.4.2.**

Remarque. 1)- la condition de stabilité pour l'équilibre E_1 égale exactement à l'opposée de la première inégalité de la faisabilité de \hat{E}_* . En effet, nous avons :

* Si $m > m_1$, alors E_1 est stable, et \hat{E}_* est infaisable.

* Si $m < m_1$, l'équilibre E_1 devient instable, et l'équilibre de co-existence \hat{E}_* existe et il est stable en ajoutant les deux conditions de faisabilité (4.3).

Par conséquent, nous avons une bifurcation transcritique où le paramètre critique est $m_c = m_1$.

- 2)- Pour l'équilibre E_1 puisque la trace de la matrice B est toujours négative alors l'apparition d'une bifurcation de Hopf dans ce cas est impossible.
- 3)- L'équilibre de la coexistence \hat{E}_* est stable dès quel existe quelque soit les paramètres du modèle. La possibilité d'avoir d'une bifurcation de Hopf est impossible même dans ce cas.

4.2 AUCUNE PRÉDATION SUR LA PROIE INFECTÉE

Ici nous étudions brièvement le cas particulier de (4.1) dans lequel le paramètre ($b = 0$) c'est-à-dire les proies infectées sont reconnues (identifiés) et complètement négligées par les prédateurs. Le modèle sans singularité s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} P' = p(-m + \alpha S) \\ S' = S(-\beta U + r(1 - \frac{S}{K}) - \alpha P) \\ U' = \frac{1}{2}(-\mu U + \beta S) \end{cases} \quad (4.5)$$

Où, la matrice Jacobienne est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -m + \alpha S & \alpha P & 0 \\ -\alpha S & -\beta U + r - 2\frac{r}{K}S - \alpha P & -\beta S \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

les points d'équilibre possibles sont encore une fois tous les points trouvés précédemment, l'origine E_0 et l'équilibre sans prédateurs E_1 avec les mêmes valeurs de population. Ces deux équilibre sont toujours réalisables. Nous trouvons aussi l'équilibre de la coexistence \hat{E}_* mais cette fois-ci avec de nouvelles valeurs

$$\hat{E}_* = (\hat{S}_*, \hat{P}_*, \hat{U}_*) = \left(\frac{\alpha r K \mu - m \beta^2 K - m r \mu}{\alpha^2 K \mu}, \frac{m}{\alpha}, \frac{\beta m}{\mu \alpha} \right)$$

Ce dernier point est faisable seulement si

$$m < m_2 := \frac{\alpha r K \mu}{K \beta^2 + r \mu}$$

Cette condition spécifie que le taux de mortalité du prédateur doit être inférieur à un certain seuil critique. Notons que m_2 coïncide avec m_1 lorsque ce dernier est évalué pour $b = 0$.

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Donc, pour ce cas l'équilibre E_0 est aussi instable où, les valeurs propres sont $-m, r, -\frac{1}{2}\mu$.

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -m + \alpha S_1 & \alpha P_1 & 0 \\ -\alpha S_1 & -\frac{r}{K} S_1 & -\beta S_1 \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

La première valeur propre de E_1 est maintenant $-m + \alpha S_1$ donc, l'équilibre sans prédateurs est localement asymptotiquement stable si et seulement si :

$$m_2 < m \tag{4.6}$$

car si (4.6) est vérifiée, nous considérons la sous-matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K} S_1 & -\beta S_1 \\ \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Dont le déterminant est positif et la trace toujours négative, par conséquence E_1 est localement asymptotiquement stable. **Figure.4.3**. Encore cette fois puisque la trace est toujours négative alors, aucune bifurcation de Hopf ne peut se produire.

Pour l'équilibre \hat{E}_* , les coefficients du polynôme caractéristique (4.4) sont donnés par :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r}{K}\hat{S}_* + \frac{1}{2}\mu \\ a_2 = \alpha^2\hat{S}_*\hat{P}_* + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{K}\mu + \beta^2\right)\hat{S}_* \\ a_3 = \frac{1}{2}\alpha^2\mu\hat{S}_*\hat{P}_* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= \frac{1}{2}\alpha^2\mu\hat{S}_*\hat{P}_* + \frac{\mu}{4}\left(\frac{r}{K}\mu + \beta^2\right)\hat{S}_* + \frac{r}{K}\hat{S}_*\left(\alpha^2\hat{S}_*\hat{P}_* + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{K}\mu + \beta^2\right)\hat{S}_*\right) - \frac{1}{2}\alpha^2\mu\hat{S}_*\hat{P}_* \\ &= \frac{\mu}{4}\left(\frac{r}{K}\mu + \beta^2\right)\hat{S}_* + \frac{r}{K}\hat{S}_*\left(\alpha^2\hat{S}_*\hat{P}_* + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{K}\mu + \beta^2\right)\hat{S}_*\right) > 0 \end{aligned}$$

Donc, \hat{E}_* est localement asymptotiquement stable dès qu'il existe. Encore une fois la bifurcation de Hopf n'apparaît pas.

- 1 Si $m_2 < m$, \hat{E}_* est infaisable et E_1 est localement asymptotiquement stable.
- 2 Si $m_2 > m$ alors, E_1 est instable, \hat{E}_* existe et il est stable.

Pour $m_2 = m$, les deux équilibres \hat{E}_* , E_1 coïncident. Donc, $m = m_2$ est la valeur critique d'une bifurcation transcritique.

4.3 L'ÉPIDÉMIE EST TOXIQUE POUR LES PRÉDATEURS

Dans ce cas, nous supposons que les proies infectées sont nuisibles pour les prédateurs lorsqu'ils entrent en contact. Le modèle devient alors

$$\begin{cases} P' = -mP + \alpha PS - bP\sqrt{I} \\ S' = -\beta S\sqrt{I} + rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - \alpha PS \\ I' = -\mu I + \beta S\sqrt{I} - bP\sqrt{I} \end{cases} \quad (4.7)$$

Encore une fois, tous les paramètres conservent leur signification de (4.1) avec un changement de signe du dernier terme de la première équation. Le système avec la singularité enlevée devient :

$$\begin{cases} P' = p(-m + \alpha S - bU) \\ S' = S(-\beta U + r(1 - \frac{S}{K}) - \alpha P) \\ U' = \frac{1}{2}(-\mu U + \beta S - bP) \end{cases} \quad (4.8)$$

4.3.1 Équilibres et leur analyse

Encore une fois l'origine E_0 et l'équilibre sans prédateur E_1 sont inchangées du cas précédent (4.2) et sont donc toujours faisables. L'équilibre de la coexistence \hat{E}_* dans ce cas est donné avec les nouvelles valeurs de la population :

$$\begin{cases} \hat{P}_* = \frac{\alpha Kr\mu - mr\mu - Km\beta^2 - bKr\beta}{\alpha^2 K\mu - 2\alpha bK\beta - b^2 r} \\ \hat{S}_* = \frac{\alpha Km\mu - bKm\beta - b^2 Kr}{\alpha^2 K\mu - 2\alpha bK\beta - b^2 r} \\ \hat{U}_* = \frac{bmr + \alpha Km\beta - \alpha bKr}{\alpha^2 K\mu - 2\alpha bK\beta - b^2 r} \end{cases}$$

Avec les conditions de faisabilités

$$\begin{aligned} 2\alpha bK\beta + b^2 r &\geq \alpha^2 K\mu, mr\mu + Km\beta^2 + bKr\beta \geq \alpha Kr\mu \\ bKm\beta + b^2 Kr &\geq \alpha Km\mu, \alpha bKr \geq bmr + \alpha Km\beta; \end{aligned} \quad (4.9)$$

où

$$\begin{aligned} 2\alpha bK\beta + b^2 r &\leq \alpha^2 K\mu, mr\mu + Km\beta^2 + bKr\beta \leq \alpha Kr\mu \\ bKm\beta + b^2 Kr &\leq \alpha Km\mu, \alpha bKr \leq bmr + \alpha Km\beta; \end{aligned} \quad (4.10)$$

La Jacobienne associée au système (4.8) est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -m + \alpha S - bU & \alpha P & -bP \\ -\alpha S & -\beta U + r - 2\frac{r}{K}S - \alpha P & -\beta S \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

La stabilité de l'origine ne change par rapport aux autres modèles, les valeurs propres sont encore $-m, r, \frac{1}{2}\mu$. Pour E_1 la matrice Jacobienne calculée en ce point est donnée par :

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -m + \alpha S_1 - bU_1 & 0 & 0 \\ -\alpha S_1 & -\frac{r}{K}S_1 & -\beta S_1 \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Cette fois la première valeur propre $\lambda_1 = -m + \alpha S_1 - bU_1$

$$\alpha S_1 - bU_1 = \frac{\alpha K r \mu - b K r \beta}{\beta^2 K + r \mu} = m_3$$

Les deux autres valeurs proviennent de la sous-matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}S_1 & -\beta S_1 \\ \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

Dont, le déterminant est positif et la trace est négative par conséquent, la stabilité du point E_1 dépend du signe de λ_1 . Deux cas sont possibles :

- * si $m < m_3$, E_1 est instable.
- * si $m > m_3$, l'équilibre sans prédateur E_1 est localement asymptotiquement stable **Figure.4.4**.

$$J(\hat{E}_*) = \begin{pmatrix} -m + \alpha \hat{S}_* - b \hat{U}_* & \alpha \hat{P}_* & -b \hat{P}_* \\ -\alpha \hat{S}_* & -\frac{r}{K} \hat{S}_* & -\beta \hat{S}_* \\ -\frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\mu \end{pmatrix}$$

car

$$\begin{cases} -m + \alpha \hat{S}_* - b \hat{U}_* = 0 \\ -\beta \hat{U}_* + r \left(1 - \frac{\hat{S}_*}{K}\right) - \alpha \hat{P}_* = 0 \end{cases}$$

Les coefficients du polynôme caractéristique (4.4) sont :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r}{K} \hat{S}_* + \frac{1}{2}\mu > 0 \\ a_2 = \alpha^2 \hat{S}_* \hat{P}_* + \frac{1}{2} (-b^2 \hat{P}_* + (\frac{r}{K}\mu + \beta^2) \hat{S}_*) \\ a_3 = \frac{1}{2} (\alpha^2 \mu - b^2 \frac{r}{K} - 2\alpha b \beta) \hat{S}_* \hat{P}_* \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_3 &= \left(\frac{r}{K} \hat{S}_* + \frac{1}{2}\mu\right) \left(\alpha^2 \hat{S}_* \hat{P}_* + \frac{1}{2} (-b^2 \hat{P}_* + (\frac{r}{K}\mu + \beta^2) \hat{S}_*)\right) - \frac{1}{2} (\alpha^2 \mu - b^2 \frac{r}{K} - 2\alpha b \beta) \hat{S}_* \hat{P}_* \\ &= \frac{r}{K} \hat{S}_*^2 (\alpha^2 \hat{P}_* + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{r}{2K}\mu) + \frac{1}{4}\mu \hat{S}_* (\frac{r}{K}\mu + \beta^2) + \alpha b \beta \hat{S}_* \hat{P}_* - \frac{1}{4}\mu b^2 \hat{P}_* \end{aligned}$$

Donc, $a_1 a_2 - a_3 > 0$ si et seulement si :

$$\frac{r}{K} \hat{S}_*^2 (\alpha^2 \hat{P}_* + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{r}{2K}\mu) + \frac{1}{4}\mu \hat{S}_* (\frac{r}{K}\mu + \beta^2) + \alpha b \beta \hat{S}_* \hat{P}_* > \frac{1}{4}\mu b^2 \hat{P}_* \quad (4.11)$$

$$a_3 > 0 \iff 2\alpha b K \beta + b^2 r < \alpha^2 K \mu \quad (4.12)$$

Par conséquent, si (4.11) et (4.12) sont vérifiées alors, \hat{E}_* est localement asymptotiquement stable [Figure.4.5](#).

4.3.2 Analyse de la bifurcation

Nous allons utiliser la méthode de Cardan pour trouver explicitement les valeurs propres du polynôme caractéristique définie par (4.4).

Nous réécrivons (4.4) sous la forme canonique suivante :

$$X^3 + pX + q = 0 \text{ avec } p, q \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

Par un changement de variable, nous posons $\lambda = X - \frac{a_1}{3}$

donc

$$\begin{aligned} \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 &= \left(X - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(X - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(X - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 \\ &= X^3 - a_1X^2 + \frac{a_1^2}{3}X - \frac{a_1^3}{27} + a_1X^2 + \frac{a_1^3}{9} - 2\frac{a_1^2}{3} + a_2X - \frac{a_1a_2}{3} + a_3 \\ &= X^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)X + \frac{a_1^2}{9} - \frac{a_1^3}{27} - a_2\frac{a_1}{3} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} p = a_2 - \frac{a_1^2}{3} \\ q = \frac{a_1^2}{9} - \frac{a_1^3}{27} - a_2\frac{a_1}{3} + a_3 \end{cases}$$

Écrivons X sous la forme $X = u + v$. L'équation canonique se réécrit alors :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \quad (4.14)$$

Nous pouvons choisir u et v de telle sorte que $3uv + p = 0$, c-à-d $uv = -\frac{p}{3}$.

Donc, l'équation (4.14) devient :

$$u^3 + v^3 = -q$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} u + v = X \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

En d'autre terme il s'agit de trouver deux nombres complexes $a = u^3$ et $b = v^3$ tel que :

$$\begin{cases} ab = -\frac{p^3}{27} \\ a + b = -q \end{cases}$$

Or, si on connaît la somme et le produit de deux nombres, dans ce cas a et b , on peut toujours trouver ces nombres comme solutions d'une équation du second degré. En effet,

$$(\eta - a)(\eta - b) = \eta^2 - (a + b)\eta + ab = \eta^2 + q\eta - \frac{p^3}{27}$$

Soit l'équation :

$$\eta^2 + q\eta - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (4.15)$$

Son discriminant donnée par :

$$\Delta = q^2 + 4\frac{p^3}{27} = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}$$

Donc, trois cas sont distingués selon le signe de la quantité $27q^2 + 4p^3$.

* Si $\Delta > 0$

Dans ce cas, l'équation (4.15) admet deux racines réelles distinctes :

$$\eta_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2}$$

$$\eta_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} < 0$$

Donc, nous avons les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} a = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \\ b = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \end{cases}$$

Si l'on veut résoudre ces deux équations dans \mathbb{C} on sait qu'il y aura trois solutions complexes pour u et trois solutions complexes pour v .

L'équation $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ a déjà la solution réelle $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Pour trouver les deux autres, en notant $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp(i\frac{2\pi}{3})$, on remarque que :

$$(ju)^3 = j^3u^3 = \exp(2\pi i)u^3 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$(j^2u)^3 = (j^2)^3u^3 = j^6u^3 = \exp(4\pi i)u^3 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Par conséquent ju et $j^2u = \bar{j}u$ sont aussi deux solutions pour l'équation $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

De même les solutions de l'équation $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ sont :

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \in \mathbb{R}, jv \in \mathbb{C}, j^2v \in \mathbb{C}$$

Puisque le produit $uv = -\frac{p}{3}$ est un réel alors, les couples possible du solution sont :

$$(u, v), (ju, j^2v) \text{ et } (j^2u, jv)$$

On obtient comme solutions de (4.13) :

$$\begin{cases} X_1 = u + v \\ X_2 = ju + j^2v \\ X_3 = j^2u + jv \end{cases}$$

$$\overline{X_2} = \overline{ju + j^2v} = \bar{j}\bar{u} + j\bar{v} = j^2u + jv = X_3 \text{ car } u, v \in \mathbb{R} \text{ et } \bar{j} = j^2.$$

Donc, X_2, X_3 sont complexes conjuguées.

Puisque X_1, X_2, X_3 sont solution de l'équation (4.13) alors :

$$\begin{aligned} X^3 + pX + q &= (X - X_1)(X - X_2)(X - X_3) \\ &= X^3 - X^2(X_1 + X_2 + X_3) + X(X_1X_2 + X_1X_3 + X_3X_2) - X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1X_2 + X_1X_3 + X_3X_2 = p \\ X_1X_2X_3 = -q \end{cases}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = (1 + j + j^2)u + (1 + j + j^2)v = 0$$

Donc, forcément $1 + j + j^2 = 0 \Rightarrow j_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Les racines de (4.13) s'écrivent :

$$\begin{cases} X_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ X_2 = ju + j^2v = j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ X_3 = j^2u + jv = j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{cases}$$

finalement, les solution de l'équation (4.4) dans ce cas sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_2 = j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_3 = j^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + j\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a_1}{3} \end{array} \right.$$

Dont la première valeur propre est réelle et les deux autres sont complexe conjuguées.

* Si $\Delta < 0$

L'équation (4.15) admet deux racines complexes conjuguées données par :

$$\eta_1 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \text{ et } \eta_2 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}$$

Les deux équations qu'il faut résoudre cette fois s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \\ b = v^3 = -\frac{q}{2} - i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \end{array} \right.$$

De la même manière nous obtiendrons :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|}} \\ X_2 = ju + \bar{j}v = ju + j^2v \\ X_3 = \bar{j}u + jv = j^2u + jv \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
\overline{X_1} &= \overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v} \\
&= \left(-\frac{q}{2} + i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(-\frac{q}{2} - i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} + i\sqrt{\left|\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right|} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= v + u = X_1
\end{aligned}$$

$$\overline{X_1} = X_1 \iff X_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\overline{X_2} &= \overline{ju + \bar{j}v} = \bar{j}\bar{u} + j\bar{v} \\
&= \bar{j}v + ju = X_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{X_3} &= \overline{\bar{j}u + jv} = j\bar{u} + \bar{j}\bar{v} \\
&= jv + \bar{j}u = X_3
\end{aligned}$$

Les trois racines ainsi obtenues sont réelles distinctes par conséquence, toutes les valeurs propres sont réelles et données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u + v - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_2 = ju + \bar{j}v - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_3 = \bar{j}u + jv - \frac{a_1}{3} \end{cases}$$

* Si $\Delta = 0$

Nous avons le cas particulier de la démonstration précédente à savoir :

$$X_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \in \mathbb{R}$$

De plus on aura

$$X_2 = X_3 = ju + \bar{j}v = ju + \bar{j}u = u(j + \bar{j}) = -u = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Les valeurs propres dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} - \frac{a_1}{3} \end{cases}$$

On sait que si la bifurcation de Hopf se produit, les valeurs propres traversent l'axe des imaginaires, en effet :

Soit $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ donc :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = -i\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2i\omega + a_3 = -a_1\omega^2 + a_3 + i(-\omega^3 + a_2\omega) = 0$$

On déduit que

$$\begin{cases} -\omega^3 + a_2\omega = 0 \\ -a_1\omega^2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\omega = \pm a_2 \Rightarrow a_1a_2 - a_3 = 0 \text{ c-à-d}$$

$$\frac{r}{K} \hat{S}_*^2 (\alpha^2 \hat{P}_* + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{r}{2K}\mu) + \frac{1}{4}\mu \hat{S}_* (\frac{r}{K}\mu + \beta^2) + \alpha b \beta \hat{S}_* \hat{P}_* = \frac{1}{4}\mu b^2 \hat{P}_* \quad (4.16)$$

Lorsque l'égalité (4.16) est vérifiée alors, deux valeurs propres traversent l'axe des imaginaires qui correspond à une bifurcation de Hopf.

- 1)- Pour $m > m_3$, l'équilibre E_1 est localement asymptotiquement stable, \hat{E}_* peut être instable si (4.9) est vérifiées où, n'existe pas dans le cas contraire.
- 2)- Pour $m < m_3$, E_1 est instable, l'équilibre de la coexistence \hat{E}_* existe et stable si (4.10),(4.11) et (4.12) sont bien vérifiées.

Par conséquent nous avons une bifurcation transcritique où le paramètre critique est $m_c = m_3$.

4.4 CONCLUSION

L'analyse des trois systèmes montre que la disparition des trois espèces est impossible, car l'origine est toujours instable. Il s'agit d'un bon résultat en termes d'écologie.

Les systèmes admettent deux autres équilibres, ces derniers sont liés par une bifurcation transcritique, qui se produit lorsque le taux de mortalité du prédateur m traverse un certain seuil m_1, m_3 , où le cas particulier m_2 pour le modèle des proies infectées ignorées (évitées) par les prédateurs. Quand le paramètre m est au-dessus de ces trois seuils, le système se stabilise à l'équilibre E_1 , où les prédateurs tendent vers l'extinction.

L'équilibre de la coexistence \hat{E}_* est localement asymptotiquement stable dès qu'il existe dans les deux premiers cas par contre dans le cas toxique les conditions (4.11) et (4.12) sont nécessaires pour avoir la stabilité. Lorsque l'égalité (4.16) est bien vérifiée nous avons vu que deux valeurs propres franchissent l'axe des imaginaires par conséquent une bifurcation de Hopf se produit et le système transite vers un régime oscillatoire.

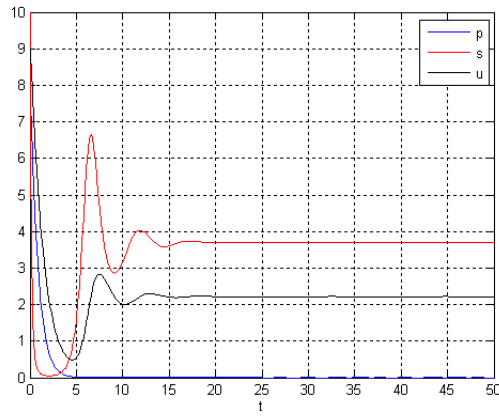


FIGURE 4.1 – La simulation numérique du modèle (4.2) avec les paramètres, $\alpha = 0.029, b = 0.025, \beta = 0.9, m = 1.35, r = 1.2, \mu = 1.5, K = 5000$ où, $-m + \alpha S_1 + bU_1 = -1.2523 < 0$ et $E_1 = (0, 2.2212, 1.3327), \hat{E}_* = (-804.3324, 23.0650, 27.2446)$ infaisable, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (8, 10, 9)$.

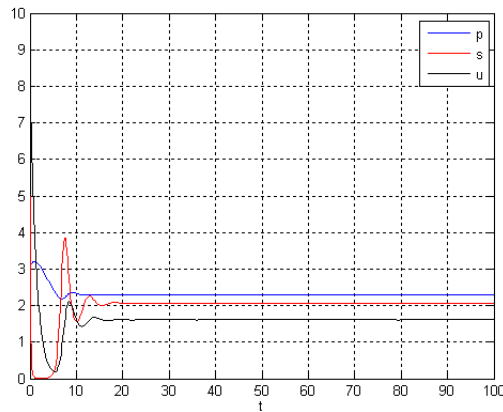


FIGURE 4.2 – La simulation numérique du modèle (4.2) avec les paramètres, $\alpha = 0.029, b = 0.025, \beta = 1.2, m = 0.1, r = 2, \mu = 1.5, K = 4000$, dans ce cas $-m + \alpha S_1 + bU_1 = 0.0020 > 0$ et $E_1 = (0, 2.0822, 1.6658), \hat{E}_* = (2.3181, 2.0605, 1.6098), a_1 = 0.7510, a_2 = 1.4891, a_3 = 0.0030$, et $a_1 a_2 - a_3 = 1.1153 > 0$, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (3, 5, 8)$.

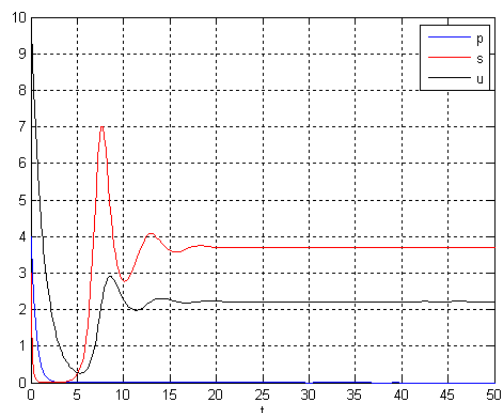


FIGURE 4.3 – La simulation numérique du modèle (4.5) avec les paramètres, $\alpha = 0.29$, $\beta = 0.9$, $m = 2$, $r = 2$, $\mu = 1.5$, $K = 5000$, dans ce cas $-m + \alpha S_1 = -0.9267 < 0$ et $E_1 = (0, 3.7010, 2.2206)$, $\hat{E}_* = (-5.9548, 6.8966, 0.3480)$ infaisable, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (4, 3, 10)$.

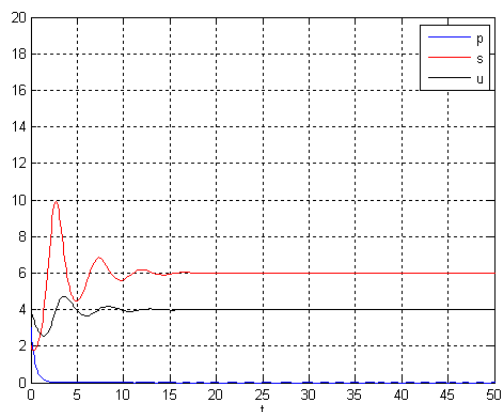


FIGURE 4.4 – La simulation numérique du modèle (4.8) avec les paramètres, $\alpha = 0.29$, $b = 0.25$, $\beta = 0.8$, $m = 1.35$, $r = 3.2$, $\mu = 1.2$, $K = 5000$ où, $-m + \alpha S_1 - bU_1 = -0.6109 < 0$ et $E_1 = (0, 5.9928, 3.9952)$, $\hat{E}_* = (25.8887, 0.0132, -5.3847)$ infaisable, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (3, 2, 4)$.

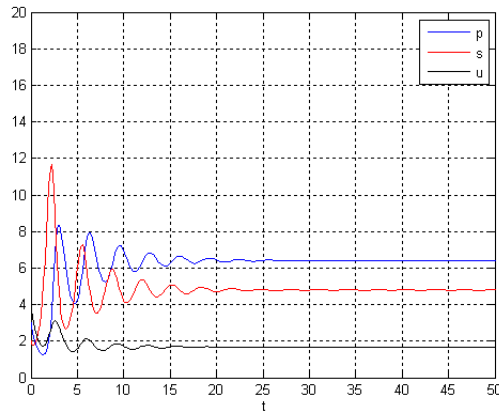


FIGURE 4.5 – La simulation numérique du modèle (4.8) avec les paramètres, $\alpha = 0.29, b = 0.025, \beta = 0.8, m = 1.35, r = 3.2, \mu = 2.2, K = 5000$ où, $-m + \alpha S_1 - bU_1 = 1.7332 > 0$ et, $E_1 = (0, 10.9759, 3.9912), \hat{E}_* = (6.4105, 4.7993, 1.6724), a_1 = 1.1031 > 0, a_2 = 4.1246, a_3 = 2.6677 > 0, a_1 a_2 - a_3 = 1.8820 > 0, \lambda_1 = -0.6946, \lambda_2 = -0.2043 + 1.9491i, \lambda_3 = -0.2043 - 1.9491i$, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (3, 2, 4)$.

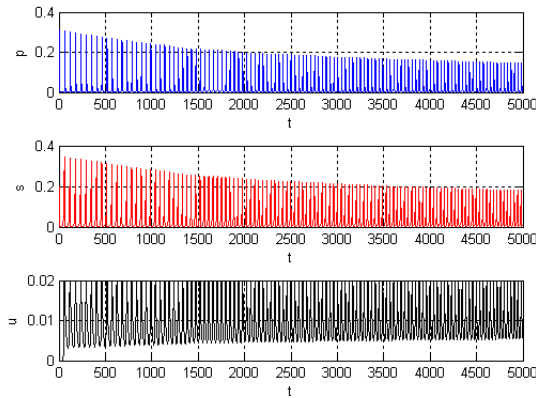


FIGURE 4.6 – La simulation numérique du modèle (4.8) avec les paramètres, $\alpha = 9.4, b = 0.025, \beta = 0.04, m = 0.35, r = 0.2, \mu = 0.1, K = 5000$ où, $-m + \alpha S_1 - bU_1 = 116.7323 > 0$ et, $E_1 = (0, 12.4688, 4.9875), \hat{E}_* = (0.0212, 0.0373, 0.0096), a_1 = 0.0500 > 0, a_2 = 0.0699, a_3 = 0.0035 > 0, a_1 a_2 - a_3 = 8.7041 \times 10^{-6} > 0, \Delta = 0.0015 > 0, \lambda_1 = -0.0499, \lambda_2 = -0.0001 + 0.2644i, \lambda_3 = -0.0001 - 0.2644i$, la condition initiale $(P_0, S_0, U_0) = (0.2, 0.2, 0.002)$.

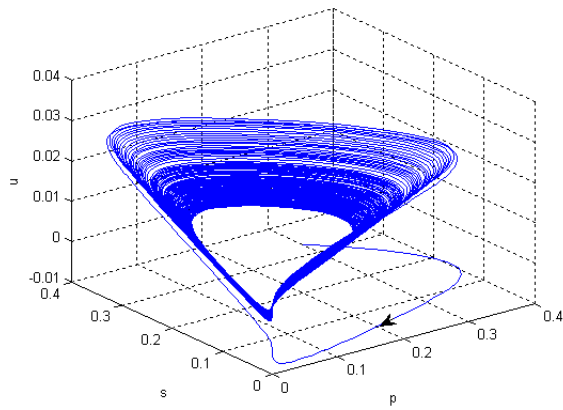


FIGURE 4.7 – Simulation numérique du modèle (4.8) en dimension 3 pour les paramètres, $\alpha = 9.4, b = 0.025, \beta = 0.04, m = 0.35, r = 0.2, \mu = 0.1, K = 5000$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ajraldi, V. Pittavino, M. and Venturino, E. *Modeling herd behavior in population systems*. Nonlinear Analysis : Real World Applications, 2011, vol. 12, no 4, p. 2319-2338. 35
- [2] Auger, Pierre. Lett, Christophe. Poggiale, Jean-Christophe. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010. 1, 4, 15
- [3] Belvisi, S. and Venturino, E. *An ecoepidemic model with diseased predators and prey group defense*. Simulation Modelling Practice and Theory 34 (2013) : 144-155. 79
- [4] Charles, S. *Cours de M1 Biologie mathématique et modélisation*, Université Lyon1, 2007. 1
- [5] Matia, S. N. et Alam, S. *Prey-predator Dynamics under Herd Behavior of Prey*, Universal Journal of Applied Mathematics 1(4) : 251-257, 2013. 35, 79
- [6] Murray, James D. *Mathematical Biology I : An Introduction*, vol. 17 of Interdisciplinary Applied Mathematics. 2002. 1
- [7] Venturino, Ezio. *A minimal model for ecoepidemics with group defense*. Journal of Biological Systems 19.04 (2011) : 763-785. 79

