

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABOU BEKR BELKAID TLEMCCEN



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

# MÉMOIRE DE MASTER

SYSTÈMES DYNAMIQUES ET APPLICATIONS À LA DYNAMIQUE DE POPULATIONS

présenté par

DJILALI Salih

## THÉORIE DES BIFURCATIONS À TRAVERS QUELQUES EXEMPLES ISSUS DE LA DYNAMIQUE DES POPULATIONS

Mémoire soutenu le 22 juin 2014 devant le jury composé de :

M. TOUAOULA. M. T.	Pr. Université de Tlemcen	(Président)
M. MOUSSAOUI. A	M.C.A. Université de Tlemcen	(Examineur)
M. ATTAR. A	M.A. Université de Tlemcen	(Examineur)
M. MIRI. S. E-H.	M.C. Université de Tlemcen	(Encadreur)



*A mes très chers parents, ABDE RAHMAN et KARIMA, qui ont  
toujours été là pour moi.*



# REMERCIEMENTS

**J**E tiens à remercier tout d'abord Monsieur MIRI Sofiane, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur TOUAOULA. M. T, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées ; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury.

Un grand merci aussi à Monsieur Moussaoui. A, pour avoir accepté de faire partie du jury. Je lui témoigne ma profonde reconnaissance pour son aide et son soutien.

Mes plus vifs remerciements à Monsieur Attar. A, pour le temps qu'il a consacré à examiner ce mémoire, et aussi d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Je remercie aussi Monsieur Abdellaoui. B, pour avoir mis à notre disposition, en sa qualité de Directeur du Laboratoire d'Analyse Non-Linéaire et Mathématiques Appliquées, tous les moyens matériels qui ont facilité la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Tlemcen, Juin 2014.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 PROLOGUE . . . . .	1
1.2 INTRODUCTION PAR DES EXEMPLES . . . . .	2
1.2.1 Bifurcation selle-noeud (saddle-node) . . . . .	2
1.2.2 La bifurcation transcritique . . . . .	6
1.2.3 Bifurcation fourche (ou « pitchfork ») super-critique . . . . .	8
1.2.4 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) . . . . .	11
<b>2 APPROCHE THÉORIQUE</b>	<b>17</b>
2.1 POINT D'ÉQUILIBRE HYPERBOLIQUE . . . . .	18
2.2 POINT D'ÉQUILIBRE NON-HYPERBOLIQUE . . . . .	19
2.3 BIFURCATION SELLE-NOEUD . . . . .	22
2.3.1 Diagramme de bifurcation : . . . . .	23
2.4 BIFURCATION TRANSCRITIQUE . . . . .	25
2.4.1 Diagramme de bifurcation . . . . .	26
2.5 BIFURCAION FOURCHE "PITCHFORK" . . . . .	28
2.5.1 Diagramme de bifurcation . . . . .	29
2.6 THÉORÈME DE POINCARÉ-ANDRONOV-HOPF . . . . .	31
<b>3 EXEMPLES ECO-ÉPIDÉMIOLOGIQUES</b>	<b>35</b>
3.1 LE MODÈLE DE BEDDINGTON . . . . .	35
3.2 LE MODÈLE SI . . . . .	39
3.3 LE MODÈLE SIS . . . . .	41
3.4 LE MODÈLE SIR . . . . .	43
3.5 LE MODÈLE SIR (AVEC ÉTAT ENDÉMIQUE) . . . . .	46

4	LA BIFURCATION BACKWARD	49
4.1	EXEMPLE DE BIFURCATION BACKWARD AVEC UNE FONCTION DE	
	TRAITEMENT :	49
4.1.1	interprétation des termes du modèle :	50
4.1.2	Les points d'équilibres :	50
4.1.3	Analyse de la stabilité :	53
4.1.4	Résumé :	56
	BIBLIOGRAPHIE	59





# INTRODUCTION



## 1.1 PROLOGUE

Ce mémoire a pour but de donner les notions de base relatives à la théorie des bifurcations, et de donner quelques exemples concrets d'applications de cette théorie. Les bifurcations sont incontournables dès que l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques, elles trouvent des applications en physique, en chimie, en architecture, en mécanique, en écologie et en épidémiologie, nous donnerons un intérêt tout particulier à ces deux derniers domaines d'application. Bien qu'elles seront souvent utilisées tout au long de ce manuscrit, nous avons fait le choix délibéré de ne pas faire de rappel des définitions basiques relatives aux systèmes dynamiques, telles que la définition de point d'équilibre, différentes notions de stabilité, ainsi qu'autre fonctions de Lyapunov et intégrale première. Ce choix est motivé par le fait que ces notions sont largement traitées durant la formation Master systèmes dynamiques et applications, et qu'on les retrouve dans la plupart des mémoires de Master des promotions précédentes.

On dira que nous sommes en présence d'une bifurcation, si un changement qualitatif se produit lorsque l'on fait varier un des paramètres, plus précisément

**Définition 1.1** *Soit le système d'équations différentielles suivant :*

$$\dot{x} = f(x, c), f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

*On dira qu'il y a bifurcation en  $c^*$ , si en une valeur  $c$  arbitrairement "proche" de  $c^*$  il existe une dynamique qualitativement différente de celle en  $c^*$ .*

En d'autres termes si l'on considère les deux systèmes

$$\dot{x} = f(x, c^*) \text{ et } \dot{x} = f(x, c),$$

avec  $c$  "proche" de  $c^*$ , alors ces deux systèmes présentent des aspects différents dans le nombre de points d'équilibre et/ou leur stabilité. On dira qu'une perturbation du paramètre donne des systèmes topologiquement non équivalents. Il est clair que cette approche est locale, et donc la bifurcation traitée est une bifurcation locale, il existe aussi une théorie relative aux bifurcations globales que l'on n'abordera pas dans ce mémoire.

Nous aurons aussi besoin d'illustrer graphiquement ce phénomène, cela se fait à travers le diagramme de bifurcation

**Définition 1.2** *Le diagramme de bifurcation, consiste en un graphique où l'on porte en abscisses les valeurs du paramètre  $c$  et en ordonnées les valeurs des points d'équilibre. Les branches en trait plein pour les points d'équilibre stables, et en tireté pour les points d'équilibre instables.*

Rappelons enfin que ce mémoire de master est une synthèse de différents travaux cités en bibliographie ; nous nous sommes largement inspirés de différents ouvrages, cours et articles scientifiques.

## 1.2 INTRODUCTION PAR DES EXEMPLES

Il est de coutume, et à juste titre, d'énoncer un théorème, une théorie, une notion et d'en suite l'illustrer par quelques exemples. Par souci pédagogique, nous avons jugé bon de transgresser cette règle et de commencer par donner des exemples avant même d'énoncer la théorie générale, le choix des exemples n'est pas fortuit comme on le verra plus tard.

Cette première section est largement inspirée des cours de Master [2]

### 1.2.1 Bifurcation selle-noeud (saddle-node)

On parle aussi de bifurcation noeud-col.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.1)$$

Selon le signe de  $c$ , il faut distinguer trois cas :

**si  $c < 0$**

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  et  $(\sqrt{|c|}, 0)$ .

Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice Jacobienne qui s'écrit :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J(x, y)$  évaluée au premier point d'équilibre  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  donne :

$$J(-\sqrt{|c|}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{|c|}$ . Par conséquent le point  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  est un noeud asymptotiquement stable.

Pour le second point d'équilibre  $(\sqrt{|c|}, 0)$ , la matrice  $J(x, y)$  devient :

$$J(\sqrt{|c|}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2\sqrt{|c|}$ . Par conséquent le point  $(\sqrt{|c|}, 0)$  est un point-selle (instable).

Les isoclines verticales  $\dot{x} = 0$  sont les deux droites  $x = \pm\sqrt{|c|}$  et l'isocline horizontale  $\dot{y} = 0$  est la droite  $y = 0$ . Le portrait de phase est illustré dans la (Figure 1)

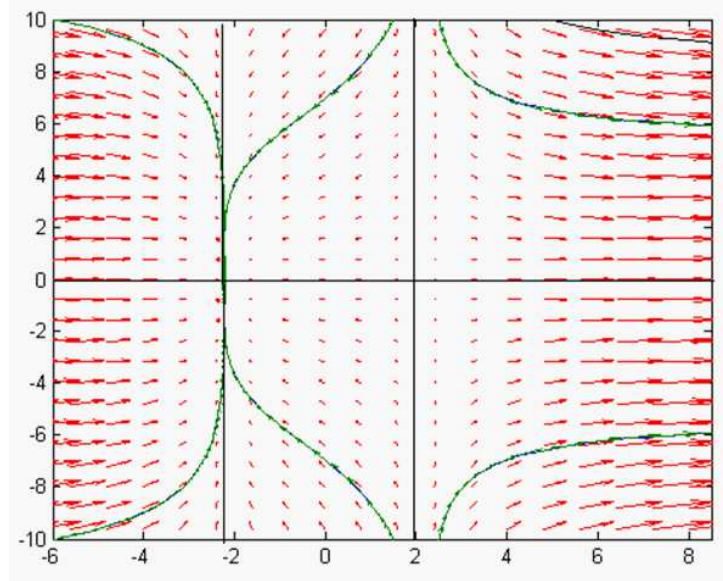


Figure 1 : portrait de phase pour  $c < 0$

si  $c = 0$

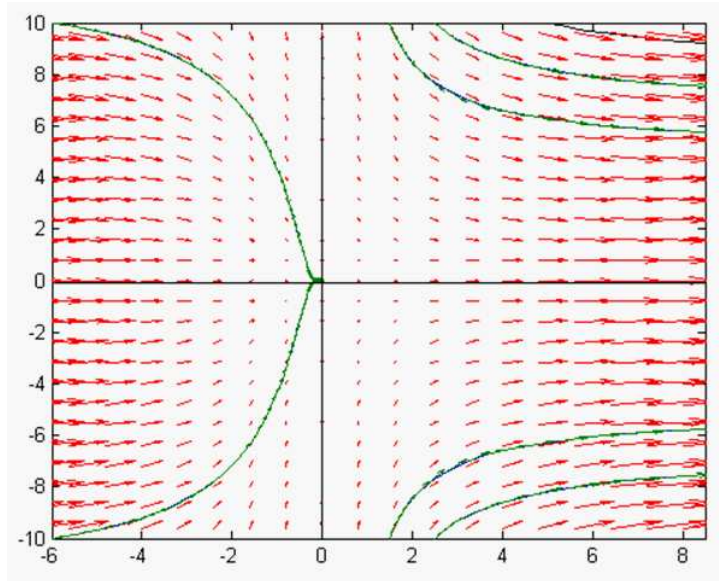
Dans ce cas, le système (1.1) se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.2)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découplé en  $x$  et en  $y$ . L'étude de la première équation du système (1.2) montre que  $x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique correspondant à un shunt positif. La seconde équation indique que  $y = 0$  est point d'équilibre asymptotiquement stable pour la seconde équation. La Figure 2 représente le portrait de phase du système (1.2) :

Figure 2 : portrait de phase pour  $c=0$ 

Ce portrait de phase prend l'apparence d'un noeud stable pour les  $x < 0$  et d'un point selle pour les  $x > 0$ .

si  $c > 0$

Dans ce cas, le système dynamique (1.2) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.3)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable  $x$  est toujours croissante. La variable  $y$  est croissante pour les  $y < 0$  et décroissante pour les  $y > 0$ . La Figure 3 montre le portrait de phase correspondant.

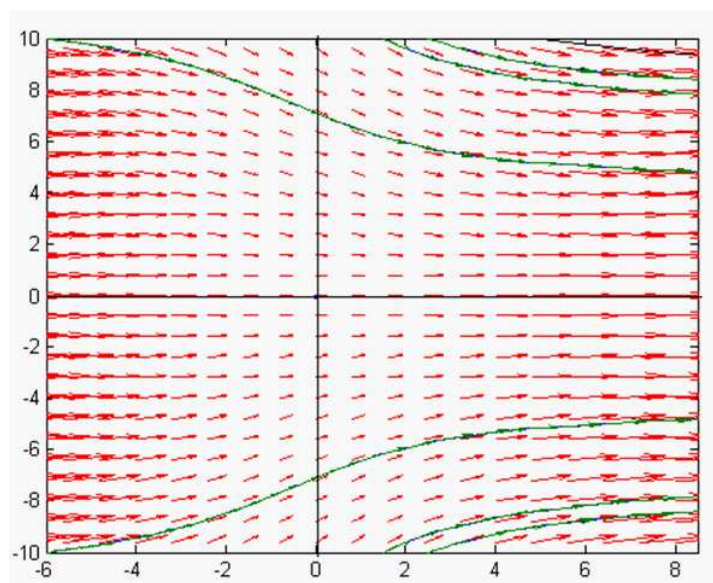


Figure 3 : Portrait de phase de la bifurcation selle-noeud pour  $c > 0$ .

Cette bifurcation est appelée une bifurcation selle-noeud et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale  $\dot{x} = 0$  et l'autre horizontale  $\dot{y} = 0$ , initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent.

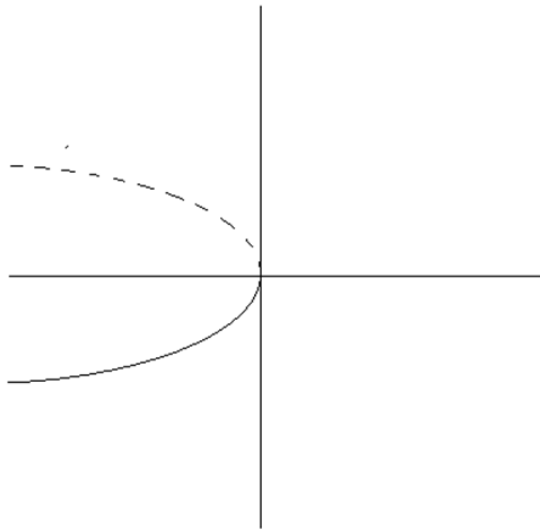


Figure 4 : Diagramme de la bifurcation selle-noeud.

### 1.2.2 La bifurcation transcritique

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = cx + x^2 \quad (1.4)$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre  $c$ .

Trois cas doivent être étudiés :

**si  $c < 0$**

Dans ce cas, nous pouvons écrire  $c = -|c|$ . Les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x(x - |c|) = 0$$

qui admet deux solutions  $x_1^* = 0$  et  $x_2^*(c) = |c|$ . On a donc :

$$\dot{x} = x(x - |c|) = x(x - x_2^*(c))$$

- Si  $0 < x < x_2^*(c)$ , alors  $\dot{x} < 0$ , c'est-à-dire que la variable  $x$  est une fonction décroissante du temps  $t$ .

- Si  $x < 0$  ou  $x > x_2^*(c)$ , alors  $\dot{x} > 0$ , c'est-à-dire que la variable  $x$  est une fonction croissante du temps  $t$ .

Ainsi,  $0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable et  $x_2^*(c)$  est un point d'équilibre instable. La figure suivante représente le portrait de phase dans le cas  $c < 0$ .

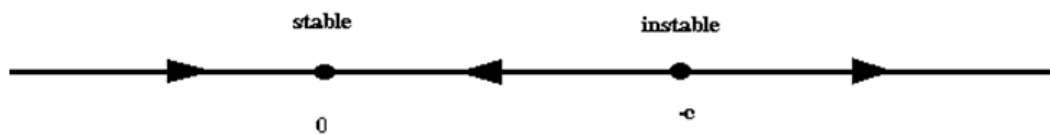


Figure 5

**si  $c = 0$**

Dans ce cas, l'équation (1.4) devient :

$$\dot{x} = x^2$$

admettant un point d'équilibre unique  $x_1^* = 0$  non hyperbolique qui est un shunt positif.

**si  $c > 0$**

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x(x + c) = 0$$

qui admet deux solutions  $x_1^* = 0$  et  $x_2^*(c) = -c < 0$ . On a donc :

$$\dot{x} = x(x + c) = x(x - x_2^*(c))$$

- Si  $x_2^*(c) < x < 0$ , alors  $\dot{x} < 0$
- Si  $x < x_2^*$ , alors  $\dot{x} > 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre instable cette fois ci, et  $x_2^*(c)$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable. La figure suivante représente le portrait de phase dans le cas  $c > 0$ .

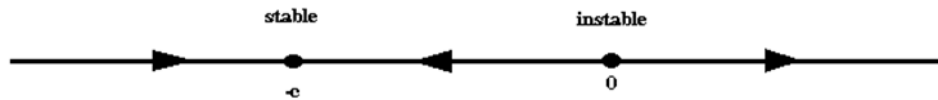


Figure 6

Le diagramme de bifurcation illustré dans la Figure 7 montre que la valeur de bifurcation est  $c^* = 0$ .

L'origine, qui est stable pour  $c < 0$ , devient instable pour  $c > 0$  alors que le point d'équilibre  $x_2^*(c)$  passe de stable à instable. Cette bifurcation est appelée bifurcation transcritique. Le nombre de points d'équilibre est conservé mais leur nature change à la valeur de bifurcation  $c^* = 0$

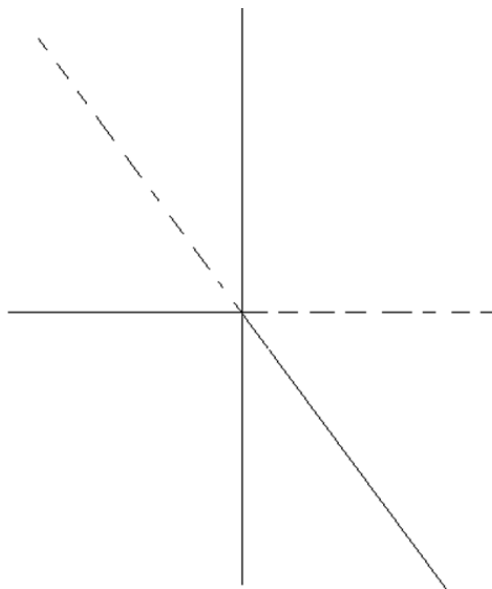


Figure 7 :diagramme de Bifurcation trans-critique

### 1.2.3 Bifurcation fourche (ou « pitchfork ») super-critique

Soit l'équation différentielle suivante :



$$\dot{x} = cx - x^3 \quad (1.5)$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre  $c$ . De nouveau, trois cas se présentent à nous :

**Si  $c < 0$**

Nous pouvons alors écrire  $c = -|c|$ . Les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = -x(x^2 + |c|) = 0$$

qui admet une solution unique  $x_1^* = 0$ . Le signe de  $\dot{x}$  est donné par le signe de  $-x$  :

- Si  $x > 0$ , alors  $\dot{x} < 0$

- Si  $x < 0$ , alors  $\dot{x} > 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

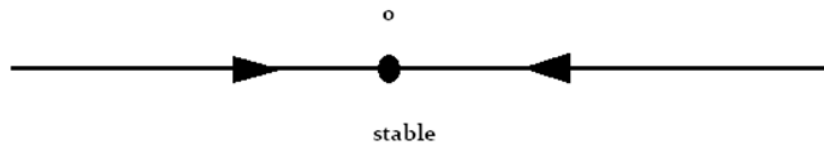


Figure 8

**Si  $c = 0$**

Dans ce cas, l'équation (1.5) devient :

$$\dot{x} = -x^3$$

admettant un point d'équilibre unique  $x_1^* = 0$  non hyperbolique ; observons que :

- Si  $x > 0$ , alors  $\dot{x} < 0$

- Si  $x < 0$ , alors  $\dot{x} > 0$

Par conséquent, l'origine est point d'équilibre asymptotiquement stable lorsque  $c = 0$ .

**Si  $c > 0$**

Dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation suivante :

$$\dot{x} = x(c - x^2) = 0$$

qui admet trois solutions  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^*(c) = -\sqrt{c}$  et  $x_3^*(c) = +\sqrt{c}$

- Si  $x < x_2^*(c)$ , alors  $\dot{x} > 0$

- Si  $x_2^*(c) < x < 0$ , alors  $\dot{x} < 0$

- Si  $0 < x < x_3^*(c)$ , alors  $\dot{x} > 0$

- Si  $x > x_3^*(c)$ , alors  $\dot{x} < 0$

Ainsi, 0 est un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables  $x_2^*(c) = -\sqrt{c}$  et  $x_3^*(c) = +\sqrt{c}$

Le portrait de phase dans le cas  $c > 0$  est présenté dans la figure suivante :

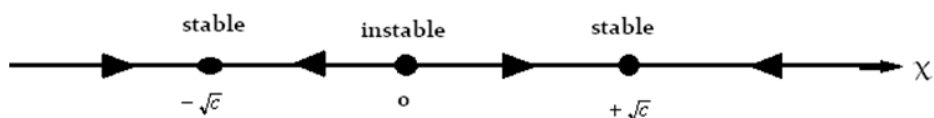


Figure 9

Le diagramme de bifurcation (Figure 10) montre que pour la valeur de bifurcation  $c^* = 0$  le nombre de points d'équilibre passe de un à trois. Le point d'équilibre situé à l'origine, qui est stable pour  $c < 0$ , devient instable pour  $c > 0$  en s'entourant de deux points d'équilibre stables en  $\pm c$ . Cette bifurcation est appelée bifurcation fourche super-critique.

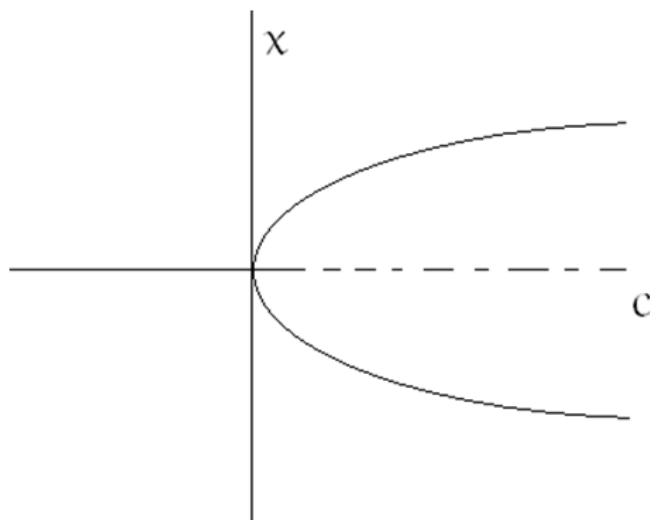


Figure 10 : diagramme de Bifurcation fourche super-critique

**Remarque 1.1** *Il existe aussi une bifurcation fourche dite sous-critique, illustrée par l'exemple suivant :*

$$\dot{x} = cx + x^3.$$

*Cette bifurcation se caractérise par le fait que lorsqu'on balaye les valeurs du paramètre  $c$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; le point d'équilibre trivial passe de stable à instable lorsqu'on traverse la valeur  $c^* = 0$ , et les deux autres points d'équilibres instables quant à eux disparaissent.*

#### 1.2.4 Bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H)

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. Nous l'avons volontairement scindé en deux parties : une partie linéaire et une partie non linéaire. La partie linéaire est caractérisée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

on a donc

$$\text{tr}(A) = 2c \text{ et } \det(A) = c^2 + 1$$

et le discriminant de l'équation caractéristique vallant  $-4$ .

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = c \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = c$  et la partie imaginaire est  $\text{Im}(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ . Lorsque le paramètre  $c$  change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable.

Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre  $c$  est égal à zéro. Nous allons voir que ces centres ne sont pas conservés dans le cas du système non-linéaire original.

Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

La dérivée s'écrit :

$$V'(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)$$

$V'$  est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (1.6). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque  $c = 0$ . Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est  $\mathbb{R}^2$ .

Afin de préciser l'allure du portrait de phase, passons en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.7)$$

Soit :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.8)$$

Dérivons la première des équations (1.7) par rapport au temps, il vient :

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(c - r^2)$$

Dérivons maintenant la seconde équation de (1.7) par rapport au temps :

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\theta'}{\cos^2 \theta} = -\frac{r^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

Finalement, en coordonnées polaires, le système (1.6) s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (1.9)$$

La seconde équation admet la solution suivante :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

où  $\theta(0)$  est la valeur de l'angle à  $t = 0$ . Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante  $w = -1$ . Les trajectoires vont tourner autour de l'origine.

La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. Selon le signe du paramètre  $c$ , le nombre de points d'équilibre varie :

-si  $c \leq 0$  L'équation admet un seul point d'équilibre  $r = 0$  qui est asymptotiquement stable (Figure 11).

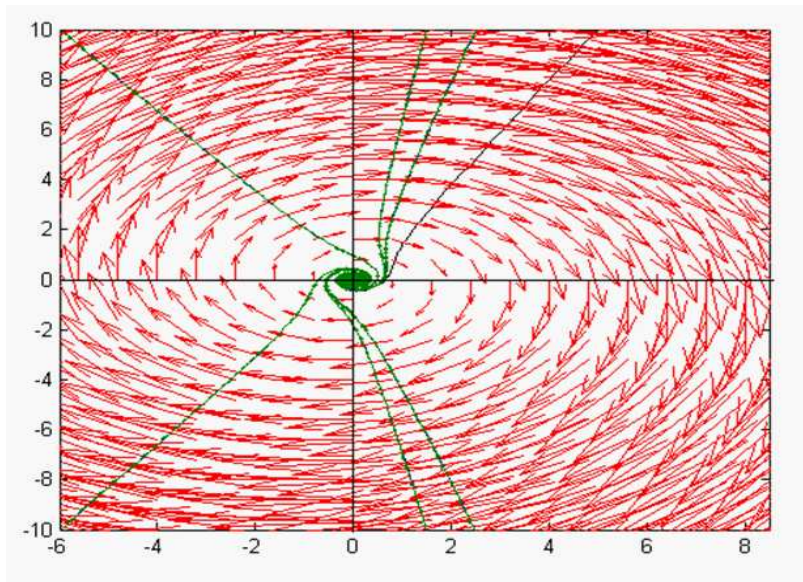


Figure 11 : Portrait de phase pour  $c \leq 0$ .

**si  $c > 0$**

La première équation dans (1.9) admet deux points d'équilibre positifs  $r = 0$  et  $r = \sqrt{c}$ . Le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre de l'équation (1.9) correspond donc à un cercle de rayon  $r = \sqrt{c}$  qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire  $w = -1$ . Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable (Figure 12).

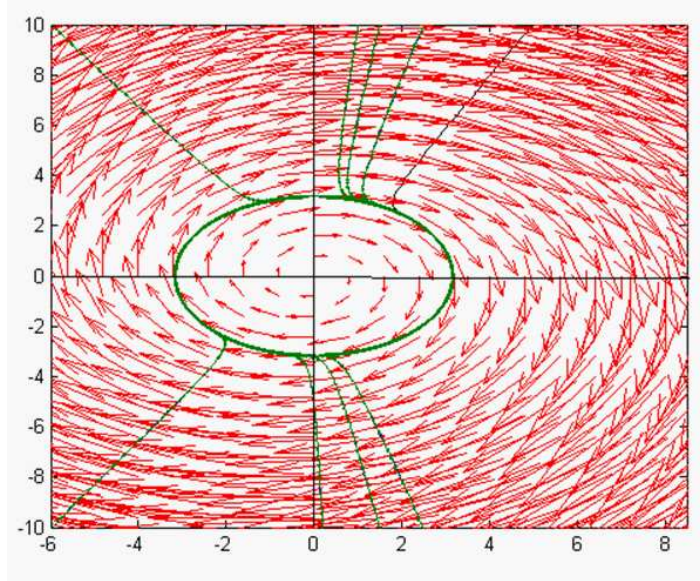


Figure 12 : Portrait de phase pour  $c > 0$  .

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

i/  $c < 0$  , l'origine est point d'équilibre unique et est un foyer stable.

ii/  $c = 0$  , l'origine est point d'équilibre unique et est asymptotiquement stable.

iii/  $c > 0$  , l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon  $r = \sqrt{c}$  .

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation en faisant apparaître les points d'équilibre, leur nature mais aussi les cycles limites dont l'amplitude est représentée en ordonnée (Figure 13). On utilisera la même notation pour les cycles limites que pour les points d'équilibre : stabilité asymptotique en trait plein et instabilité en pointillés.

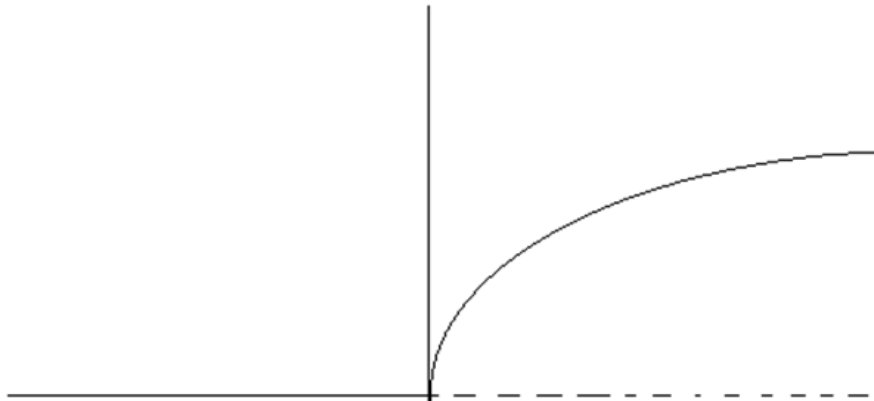


Figure 13 : Diagramme de la bifurcation de PAH super-critique .

Cette bifurcation s'appelle une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf. A la bifurcation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable dont l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de **bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique**, il existe aussi deux autres types de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf, l'une dite sous-critique ; et l'autre dite dégénérée, nous y reviendrons dans la section suivante.

**Remarque 1.2** *Il existe d'autres type de bifurcations, nous renvoyons le lecteur à [3] pour plus de détails. Nous attirons l'attention du lecteur, qu'il existe des bifurcations à deux paramètres, comme cela est le cas de la bifurcation "cusp" ou fronce, voir par exemple [5, 2]*





# APPROCHE THÉORIQUE

Dans ce chapitre nous exposons quelques éléments de la théorie générale relative aux bifurcations locales, nous verrons que les exemples présentés dans le chapitre précédent sont les dignes représentants des différents cas de figure. Ce chapitre est largement et librement inspiré de différents cours de Master Systèmes dynamiques et applications, ainsi que du livre référence [3]

**Théorème 2.1** *Théorème des fonctions implicites :*

Soit

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x) \end{cases}$$

une fonction de classe  $C^1$  telle que

$$F(0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \neq 0$$

alors il existe  $\delta > 0$  et  $\eta > 0$  et une fonction  $\Psi$  de classe  $C^1$

$$\Psi : \{\lambda; \|\lambda\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\Psi(0) = 0 \text{ et } F(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0 \forall \lambda; \|\lambda\| < \delta$$

de plus si pour  $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$   $\|\lambda_0\| < \delta$  et  $|x_0| < \eta$  tel que

$$F(\lambda_0, x_0) = 0$$

alors

$$x_0 = \Psi(\lambda_0)$$

**Remarque 2.1** *Le théorème introduit plus haut est en réalité une version "simplifiée" du théorème des fonctions implicites, mais nous n'aurons besoin que de cette version simplifiée par la suite, c'est pourquoi nous n'avons pas jugé nécessaire de le donner dans sa version générale et abstraite.*

## 2.1 POINT D'ÉQUILIBRE HYPERBOLIQUE

On s'intéresse à  $\dot{x} = f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $f \in C^1$  vérifiant  $f(0) = 0$  (donc 0 est supposé être un point d'équilibre) et  $f'(0) \neq 0$  (dans ce cas le point d'équilibre est dit hyperbolique)

$x^* = 0$  est un point d'équilibre hyperbolique; dont la stabilité (locale) peut être déduite par étude du signe de  $f'(0)$

$$\dot{x} = f(0) + f'(0)x + o(x) \implies \dot{x} = f'(0)x + o(x)$$

Nous allons à présent perturber l'équation de départ et considérons l'équation :

$$\dot{x} = F(\lambda, x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) \rightarrow F(\lambda, x) \end{array} \right.$$

une fonction de classe  $C^1$  telle que  $F(0, x) = f(x)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 0$

Comme  $F(0, 0) = 0 = f(0)$  et  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0) \neq 0$  nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe alors des constantes  $\delta > 0$  et  $\eta > 0$ ; une fonction  $\Psi$  de classe  $C^1$ ; telle que  $\Psi(0) = 0$  vérifiant  $F(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0$ .

De plus pour  $\|\lambda\| < \delta$  et  $|x| < \eta$  la seule solution de  $F(\lambda, x) = 0$  est donnée par  $x = \Psi(\lambda)$ .

Donc pour  $|x| < \eta$  l'équation  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  possède un unique équilibre  $x^* = \Psi(\lambda)$ ; pour étudier la nature de ce point d'équilibre étudions le signe de  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x^*) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \Psi(\lambda))$  or on sait que  $\Psi(0) = 0$  i.e.  $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \Psi(0)) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = f'(0)$  comme  $F$  est de classe  $C^1$ ; il existe un  $\delta > 0$  tel

que pour  $\|\lambda\| < \delta$  le signe de  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \Psi(\lambda))$  est le même que celui de  $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0)$  donc pour  $\lambda$  proche de 0 l'équation perturbée possède un unique point d'équilibre de même nature que 0 pour l'équation  $\dot{x} = f(x)$

On dit dans ce cas, que l'équation est insensible par petite perturbation du champ de vecteurs ; et dans ce cas aucune bifurcation ne fera son apparition.

## 2.2 POINT D'ÉQUILIBRE NON-HYPERBOLIQUE

On considère toujours l'équation dans  $\mathbb{R}$ ,  $\dot{x} = f(x)$ , avec cette fois-ci  $f$  de classe  $C^2$  vérifiant  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  et  $f''(0) \neq 0$ ;  $x^* = 0$  est donc un point d'équilibre non-hyperbolique, dans ce cas la linéarisation ne donne aucune information sur la stabilité du point d'équilibre

Considérons l'équation perturbée :

$$\dot{x} = F(\lambda, x),$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x) \end{array} \right.$  est une fonction de classe  $C^2$  vérifiant :

$$F(0, x) = f(x),$$

et donc  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0), \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f''(0) \neq 0 \text{ et } F(0,0) = 0 \right]$

le développement de Taylor de  $F$  au voisinage de l'origine donne :

$$F(\lambda, x) = a(\lambda) + b(\lambda)x + \alpha(\lambda)\frac{x^2}{2} + G(\lambda, x)$$

$a(0) = 0$ ,  $b(0) = 0$ ,  $\alpha(0) = f''(0) \neq 0$  et  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \eta > 0$ ;

$$\|\lambda\| < \delta \text{ et } |x| < \eta \implies |G(\lambda, x)| < \varepsilon |x|^2$$

Considérons  $H(\lambda, x) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x)$  par les propriétés de  $F$ ,

$$H(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = f''(0) \neq 0,$$

on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à  $H$ . Donc il existe un  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  une fonction  $\Psi$  de classe  $C^1$ ; définie pour  $\|\lambda\| < \delta$ ; telle que  $\Psi(0) = 0$ ; et  $H(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0$  i.e  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0$  (et  $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x) = 0$

por  $\|\lambda\| < \delta$  et  $|x| < \eta \implies x = \Psi(\lambda)$ ).

donc pour chaque  $\lambda$  fixé la fonction  $F(\lambda, \Psi(\lambda))$  la valeur extrême de  $F$

**1<sup>er</sup> cas**  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f''(0) > 0$ :

Donc  $F$  est convexe (au voisinage de  $x = 0$   $|x| < \eta$ ) et  $(\lambda, \Psi(\lambda))$  est un minimum; donc  $F(\lambda, x)$  a l'aspect suivant :

-Lorsque  $\alpha(\lambda) > 0$

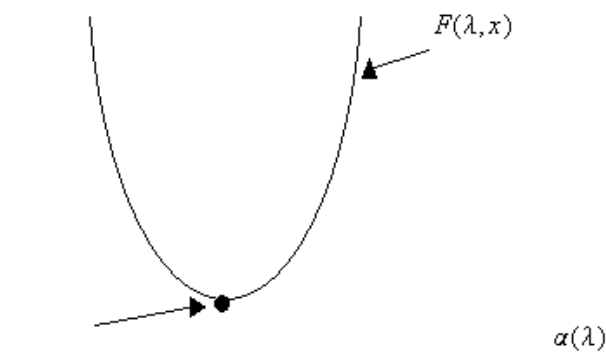


Figure 14

-Lorsque  $\alpha(\lambda) < 0$

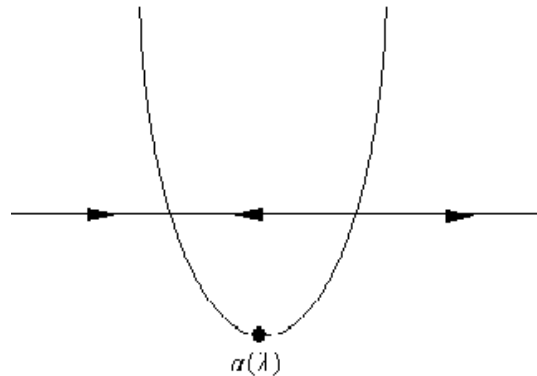


Figure 15

$F(\lambda, x)$  s'annule en deux points donc l'équation  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  possède deux points d'équilibre dans  $|x| < \eta$

-Lorsque  $\alpha(\lambda) = 0$

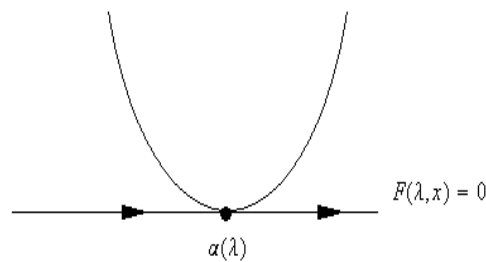


Figure 16

$F(\lambda, x)$  s'annule en un unique point donc l'équation  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  possède un unique point d'équilibre (non-hyperbolique)

-Si  $\alpha(\lambda) > 0$

$F(\lambda, x)$  ne s'annule pas (au voisinage de  $x = 0$ ) pas de point d'équilibre au voisinage de l'origine

**2<sup>ème</sup> cas**  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f''(0) < 0$  :

dans ce cas  $F$  est concave (au voisinage de  $x = 0$ ) et  $(\lambda, \Psi(\lambda))$  est un maximum, et la même étude précédente peut être reprise il suffit d'inverser les cas

-Si  $\alpha(\lambda) < 0$ ;  $F(\lambda, x)$  ne s'annule pas; pas de point d'équilibre au voisinage de l'origine .

-Si  $\alpha(\lambda) = 0$  ;  $((\lambda, \Psi(\lambda)) \quad F(\lambda, x)$  s'annule en un seul point  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  possède un seul point d'équilibre non-hyperbolique )

-Si  $\alpha(\lambda) > 0$

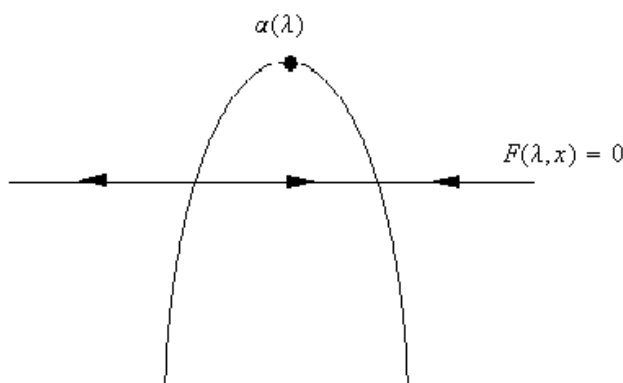


Figure 17

$F(\lambda, x)$  s'annule en deux points; l'équation  $\dot{x} = F(\lambda, x)$  possède deux points d'équilibre au voisinage de l'origine .

On peut résumer tous les cas de manière suivante :  $\dot{x} = F(\lambda, x)$

-Si  $\alpha(\lambda)f''(0) < 0$  apparition de deux points d'équilibres (hyperbolique).

-Si  $\alpha(\lambda)f''(0) > 0$  pas de point d'équilibre au voisinage de l'origine .

-Si  $\alpha(\lambda) = 0$  point d'équilibre non-hyperbolique .

### 2.3 BIFURCATION SELLE-NOEUD

Nous allons considérer l'équation différentielle suivante :

$\dot{x} = f(x, \lambda)$  avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction suffisamment régulière avec  $f(0, 0) = 0$ ;  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  (c.à.d que  $(0, 0)$  est un point d'équilibre non-hyperbolique) ;  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$ , par un développement limité au voisinage du point d'équilibre .

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0)\lambda + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + \dots \\ &= A\lambda + Bx^2 + \dots\end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \text{ et } B = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

posons

$$U = \sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|}x, \mu = \frac{A}{B}\lambda \text{ et } T = B\sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|}t$$

$$\dot{U} = \dot{x}\sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|} = \sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|}(A\lambda + Bx^2) = A\sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|}\lambda + B\sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|}x^2$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = B\sqrt{\left|\frac{B}{A}\right|} \left(\frac{A}{B}\lambda + U^2\right) \\ &\implies \frac{\partial U}{\partial T} = \mu + U^2.\end{aligned}$$

La dernière équation est dite forme normale de la bifurcation selle-noeud, on y reconnaît la première équation du système (1.1); introduit dans le premier exemple.

### 2.3.1 Diagramme de bifurcation :

On suppose que  $(0,0)$  est la valeur de bifurcation

On a  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0$  donc on ne peut appliquer le théorème des fonctions

implicites :  $\exists (U, V) \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert) et une fonction  $\Psi$  de même régularité

que  $f$  telle que :

$$\begin{aligned}\Psi : U &\rightarrow V & \mu &= \Psi(x) \text{ et } \Psi(0) = 0 \\ x &\rightarrow \Psi(x)\end{aligned}$$

et

$$f(x, \Psi(x)) = 0 \forall x \in U \quad (2.1)$$

montrons que  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = 0$  et  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) \neq 0$

dérivons (2.1) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \Psi(x)) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \Psi(x)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(x)$$

remplaçons  $x$  par 0, on trouve :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0)} = 0$$

c.à.d la courbe des points fixes est tangente à la courbe  $\Psi = 0$  en  $x = 0$ .

D'un autre côté

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \Psi(x)) = 0 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(x, \Psi(x)) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) \right)^2 = 0$$

remplaçons  $x$  par 0 on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) = 0 \implies \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0)} \neq 0$$

puisque  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0,0) = 0$  alors on a deux possibilités  $x$

-Si  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) > 0 \implies \Psi$  est convexe au voisinage de 0

-Si  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) < 0 \implies \Psi$  est concave au voisinage de 0

donc on a deux possibilités pour la courbe de  $\Psi$  au voisinage de 0



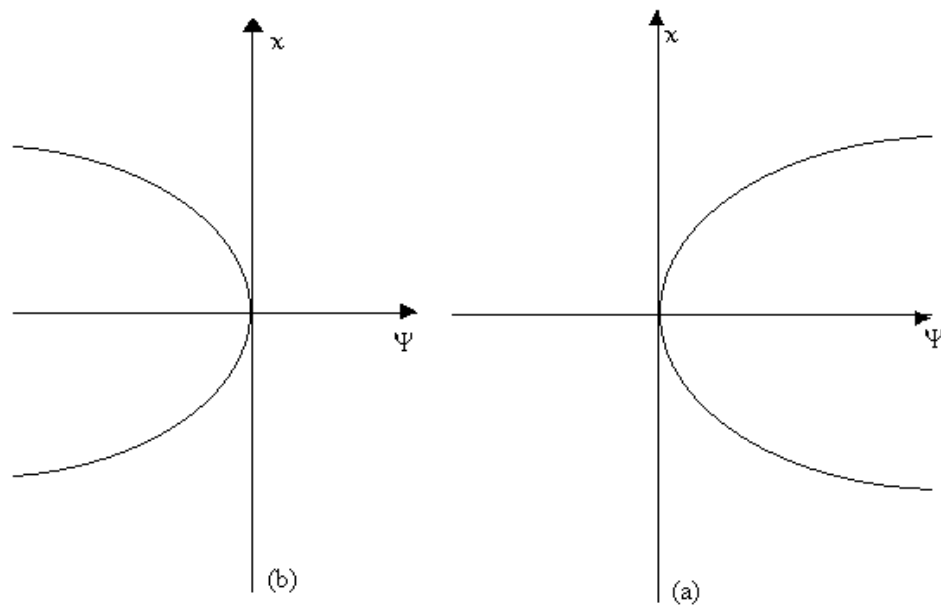


Figure 18

Montrons que (a) et (b) sont les cas possibles de diagramme de bifurcation selle-noeud. Pour fixer les idées nous allons nous limiter au cas graphe (a), gardons à l'esprit que l'on a démontré que  $f(x, \Psi(x)) = 0$

Cherchons les points d'équilibre  $\mu = \Psi(x) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = 0 \implies \Psi$  n'est pas inversible au voisinage de 0 (car  $\Psi$  est convexe) supposons que  $\exists a_1$  telle que  $] -a_1, a_1[ \subseteq U$  et  $\exists b_1$  telle que  $] -b_1, b_1[ \subseteq V$

-Si  $\lambda \in [0, b_1[$  et  $x \in ]a_1, 0]$   $\Psi$  est inversible  $\implies x = \Psi^{-1}(\lambda)$  est un point d'équilibre

si  $x \in [0, a_1[$   $\Psi$  est inversible  $\implies x = \Psi^{-1}(\lambda)$  est un point d'équilibre

-Si  $\lambda \in ] -b_1, 0]$  la fonction  $\Psi$  n'est pas définie  $\implies$  on a pas des points d'équilibres c.à.d (a) et (b) sont les cas possibles de diagramme de bifurcation selle noeud (sans déterminer la stabilité des point d'équilibre.)

## 2.4 BIFURCATION TRANSCRITIQUE

Considérons toujours l'équation  $\dot{x} = f(x, \lambda)$   $x \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

supposons que  $f(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  et en ajoute une troisième condition  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$  avec  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$

par un développement limité au voisinage de  $(0,0)$  on obtient

$$f(x, \lambda) = f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + x\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) + \dots$$

posons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$$

l'équation devient :

$$f(x, \lambda) = Ax^2 + Bx\lambda \implies \dot{x} = Ax^2 + Bx\lambda$$

Effectuons les changements

$$U = \frac{x}{A} \text{ et } T = \frac{t}{A^2} \text{ et } \mu = \frac{B\lambda}{A^2}$$

alors :

$$\dot{U} = \frac{\dot{x}}{A} = x^2 + \frac{B\lambda}{A}x = A^2U^2 + B\lambda U$$

$$\implies \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = A^2U^2 + B\lambda U$$

$$\implies \frac{\partial U}{\partial T} = U^2 + \mu U.$$

La dernière équation est dite forme normale de la bifurcation transcritique, on y reconnaît l'équation (1.4); introduite dans le deuxième exemple.

#### 2.4.1 Diagramme de bifurcation

On a  $f(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$  ; on ne peut donc pas appliquer le théorème des fonctions implicites . Posons  $F(x, \lambda) = \frac{f(x, \lambda)}{x}$  mais

$F(x, \lambda)$  n'est pas définie en  $(0, \lambda)$  par un prolongement par continuité on

$$\text{trouve : } F(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{f(x, \lambda)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x, \lambda)}{x} - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x - 0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

et la même chose pour

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2(0, 0)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0) \neq 0$$

comme  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0) \neq 0$  alors on peut à présent appliquer le théorème des fonctions implicites à  $F$ ; ainsi  $\exists(U, V) \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert) et il existe une

fonction  $\Psi$  de même régularité que  $f$  telle que

$$\begin{aligned} \Psi : U &\rightarrow V \\ x &\rightarrow \Psi(x) \end{aligned} \quad \text{et } \lambda = \Psi(x), \quad \Psi(0) = 0 \quad \text{et } F(x, \Psi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

on montre que  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \Psi(x)) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \Psi(x)) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$$

remplaçons  $x$  par 0 on obtient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0, 0)} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0, 0)} \neq 0 \implies \text{la fonction } \Psi \text{ est soit croissante}$$

ou décroissante au voisinage de 0, et la représentation graphique de  $\Psi$  au voisinage de 0 est donnée par :

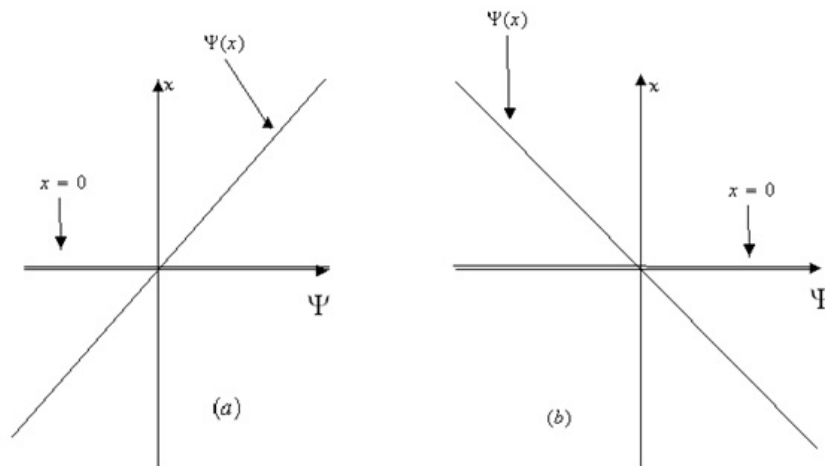


Figure 19

Montrons que (a) et (b) sont les cas possibles de diagramme de bifurcation

on sait que  $F(x, \Psi(x)) = 0$ , cherchons les points d'équilibre.

Soit  $\lambda = \Psi(x)$  et  $\Psi(0) = 0$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial x} \neq 0$ , nous savons aussi d'après l'étude précédente que  $\Psi(x)$  est inversible, et par suite  $x = \Psi^{-1}(\lambda)$  est un point d'équilibre toujours existe et on a 0 un point d'équilibre toujours existe aussi; c.à.d que (a) et (b) représentent bien les cas possibles de diagramme de bifurcation transcritique (sans déterminer la stabilité des point d'équilibre. )

## 2.5 BIFURCAION FOURCHE "PITCHFORK"

Reprenons toujours notre équation générique,  $\dot{x} = f(x, \lambda)$   $x \in \mathbb{R}$   
 $\lambda \in \mathbb{R}$ , avec cette fois-ci  $f(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$  ,  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$  et  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ .

Par un développement limité au voisinage de l'origine on trouve :

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) + x\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + \dots \\ &= x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + x\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0). \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0 \end{aligned}$$

notre équation devient :

$$\dot{x} = Ax^3 + Bx\lambda$$

Effectuons les changements  $U = \frac{x}{A}$ ,  $T = \frac{t}{A^3}$  et  $\mu = \frac{B\lambda}{A^3}$ , ce qui conduit

à :

$$\dot{U} = \frac{\dot{x}}{A} = x^3 + \frac{B\lambda}{A}x = A^3U^3 + B\lambda U$$

et par suite

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = A^3U^3 + B\lambda U$$

$$\implies \frac{\partial U}{\partial T} = U^3 + \mu U$$

La dernière équation est dite forme normale de la bifurcation fourche (super-critique quand  $A < 0$  et sous-critique quand  $A > 0$ ), on y reconnaît l'équation (1.5); introduite dans le troisième exemple.

### 2.5.1 Diagramme de bifurcation

Nous sommes toujours dans le cadre des hypothèses :  $f(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$  ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$  et  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ , et puisque  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = 0$  donc on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites .

Posons  $f(x, \lambda) = xF(x, \lambda)$   $x \in \mathbb{R}$   $\lambda \in \mathbb{R}$

$\implies F(x, \lambda) = \frac{f(x, \lambda)}{x}$  mais  $F(x, \lambda)$  n'est pas définie en  $(0, \lambda)$

par un prolongement par continuité :

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{f(x, \lambda)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{et } F(0,0) = 0, \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

et  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0) \neq 0$  donc nous pouvons à présent appliquer le théorème des fonctions implicites à  $F$  :

$\exists (U, V) \subset \mathbb{R}^2$  (ouvert) et il existe une fonction  $\Psi$  de même régularité

que  $F$  telle que

$$\begin{aligned} \Psi : U &\rightarrow V \\ x &\rightarrow \Psi(x) \end{aligned} \quad \text{avec } \lambda = \Psi(x), \Psi(0) = 0 \text{ et } F(x, \Psi(x)) = 0$$

$\forall x \in U$

montrons que  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = 0$  et  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \Psi(x)) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \Psi(x)) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x)$$

remplaçons  $x$  par 0 on obtient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0)} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \lambda}(0,0)} = 0$$

c.à.d la courbe des points fixes est tangente à la courbe  $\Psi = 0$  en  $x = 0$

calculons  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \Psi(x)) = 0 \implies \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) = 0$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) \right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \Psi(x)) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \Psi(x)) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2}(x, \Psi(x)) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x) \right)^2$$

remplaçons  $x$  par 0 on trouve :

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) \implies \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0)} \neq 0$$

-Si  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) > 0 \implies \Psi$  est convexe au voisinage de 0 (figure (a))

-Si  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0) < 0 \implies \Psi$  est concave au voisinage de 0 (figure (b))

(on ajoute la représentation de  $x = 0$ )

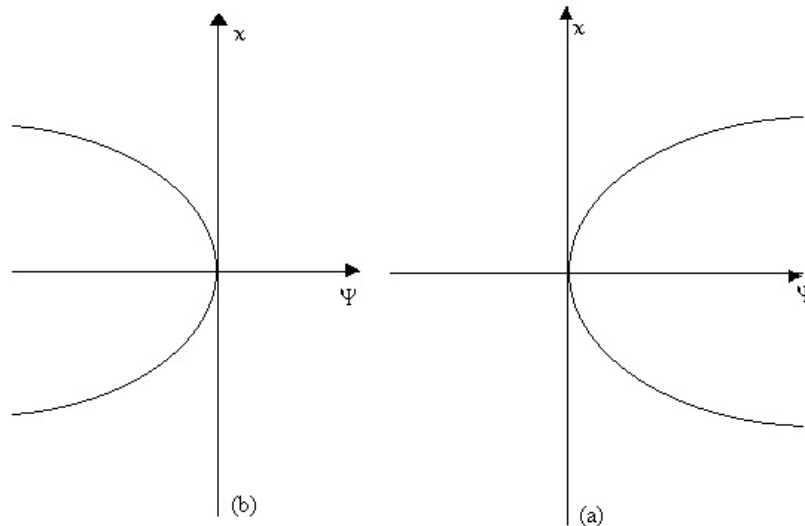


Figure 20

Montrons que (a) et (b) sont les cas possibles de diagramme de bifurcation fourch (sans montrer la stabilité des états d'équilibre) pour simplifier nous nous limitons au cas (a)

on a  $F(x, \Psi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$

cherchons les points d'équilibres

on sait que  $\Psi(x) = \lambda$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0) = 0 \implies \Psi$  n'est pas inversible au voisinage de 0 ( $\Psi$  convexe.)

Supposons que  $\exists a_1$  tel que  $] -a_1, a_1[ \subset U$  et  $\exists b_1$  tel que  $] -b_1, b_1[ \subset V$

-Pour  $x \in ] -a_1, 0[$  dans cet intervalle  $\Psi$  est inversible

$\lambda = \Psi(x) \implies x = \Psi^{-1}(\lambda)$  est un point d'équilibre

-Pour  $x \in ]0, a_1[$  dans cet intervalle aussi  $\Psi$  est inversible

$\lambda = \Psi(x) \implies x = \Psi^{-1}(\lambda)$  est un autre point d'équilibre

c.à.d (a) et (b) représentent bien les cas possibles de diagramme de bifurcation fourche.

## 2.6 THÉORÈME DE POINCARÉ-ANDRONOV-HOPF

Le théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas toujours facilement applicable. Aussi, le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) permet-il de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite. De plus, contrairement au théorème de Poincaré-Bendixson qui n'est valable que dans le plan, Le théorème de P-A-H est applicable en dimension supérieure à deux.

### Théorème 2.2 *Théorème de P-A-H en dimension 2.*

Soit le système dynamique suivant gouvernant les variables réelles  $x(t)$  et  $y(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre de coordonnées  $(x^*(c), y^*(c))$ . Soit  $A(x^*(c), y^*(c))$  la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme  $\lambda_{1,2} = a(c) \pm ib(c)$  avec  $a(c)$  la partie réelle et  $b(c)$  la partie imaginaire. Soit  $c^*$  une valeur particulière du paramètre  $c$  pour laquelle on a :  $a(c^*) = 0$ ,  $b(c^*) \neq 0$  et  $\left. \frac{\partial a}{\partial c} \right|_{c^*} \neq 0$ . Alors, si  $\left. \frac{\partial a}{\partial c} \right|_{c^*} > 0$ , trois cas sont possibles :

- Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$ . Le point d'équilibre  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$  correspond alors à des centres.

#### On parle de *bifurcation de Hopf dégénérée*

- Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), le point d'équilibre  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$  est asymptotiquement stable, et  $\exists \tilde{c} > c^* / \forall c$  vérifiant  $c^* < c < \tilde{c}$  tel qu'il existe, autour de  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$  qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{c - c^*}$ .

#### On parle de *bifurcation de Hopf super-critique*

- Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), le point d'équilibre  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$  est instable, et  $\exists \tilde{c} > c^* / \forall c$  vérifiant  $c^* < c < \tilde{c}$  tel qu'il existe, autour de

$(x^*(c^*), y^*(c^*))$  qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à  $c - c^*$ .

On parle de **bifurcation de Hopf sous-critique**

**Remarque 2.2** Dans le cas où  $\left. \frac{\partial a}{\partial c} \right|_{c^*} < 0$ , il faut inverser les conclusions, c'est-à-dire que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à  $c^*$ .

En résumé, voici les quatre cas de figure possibles :

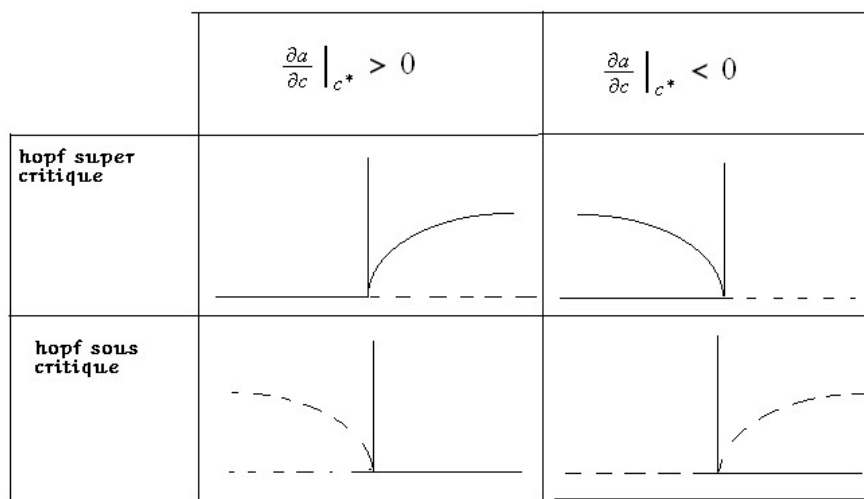


Figure 21

Une bifurcation de Hopf se produit donc lorsque les valeurs propres du système linéaire traversent l'axe imaginaire -condition dite de transversalité-, autrement dit que leur partie réelle peut s'annuler. Le système linéaire pour  $c = c^*$  prévoit donc des centres.

Dans le premier cas, les centres sont conservés, il s'agit de la bifurcation de P-A-H dégénérée.

Dans le second cas, le théorème prévoit l'existence d'un cycle limite asymptotiquement stable pour des valeurs du paramètre supérieures à  $c^*$ . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H supercritique.

Enfin, dans le troisième cas, le théorème prévoit un cycle limite instable pour des valeurs du paramètre inférieures à  $c^*$ . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H sous-critique.



Lorsqu'un cycle limite existe, son amplitude est nulle à la bifurcation et augmente en racine carrée de l'écart entre le paramètre  $c$  et la valeur de bifurcation  $c^*$ . L'existence d'un cycle limite est garantie jusqu'à une valeur  $\tilde{c}$  qui dépendra de chaque cas ; cette valeur assure que les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Dans le cas où il existe des centres à la bifurcation (cas 1), il est nécessaire de mettre en évidence une intégrale première présentant un extremum au point d'équilibre.

Le théorème nous permet ( de manière assez simple ) de confirmer que nous sommes en présence d'une bifurcation P-A-H, mais il est plus compliqué déterminer lequel des trois cas est le bon. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes.

**Remarque 2.3** *Il existe plusieurs approches et plusieurs références pour la démonstration du théorème P-A-H, nous renvoyons le lecteur par exemple à [8]*



## EXEMPLES

### ECO-ÉPIDÉMIOLOGIQUES

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples d'application de la théorie des bifurcations introduite plus haut. Dans un premier temps nous nous intéressons au cas d'un système proies prédateurs avec fonction réponse dite de Beddington. Nous présenterons ensuite différents exemple intervenant dans la modélisation en épidémiologie.

#### 3.1 LE MODÈLE DE BEDDINGTON

Considérons le modèle suivant dit de Beddington pour décrire la dynamique d'une population constituée de classes en interaction de prédation :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - \frac{axy}{1+bx+cy} \\ \dot{y} = -\mu y + \frac{eaxy}{1+bx+cy} \end{cases} \quad (3.1)$$

$x(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement les densités de proies et de prédateurs à l'instant  $t$ ,  $r$  est le taux de croissance de la proie et  $\mu$  le taux de mortalité du prédateur.  $a, b, c$  sont les paramètres de prédation. La fonction réponse, c'est-à-dire le nombre de proies mangées par prédateur et par unité de temps est la fonction réponse  $FR$  de Beddington :

$$FR(x) = \frac{ax}{1 + bx + cy}$$

$e$  est le taux de conversion de biomasse des proies en biomasse de prédateurs. Tous les paramètres sont strictement positifs.

Le cadran positif est positivement invariant, pour s'en convaincre il

suffit d'observer que les droites  $x = 0$  et  $y = 0$  sont respectivement isoclines verticale et horizontale, et que le champ de vecteurs sur les isoclines  $y$  est entrant.

L'origine est trivialement un point d'équilibre. Il existe aussi un autre point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  donné par :

$$\begin{cases} r - \frac{ay}{1+bx+cy} = 0 \\ -\mu + \frac{eax}{1+bx+cy} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} 1 + bx + cy = \frac{a}{r}y \\ 1 + bx + cy = \frac{ea}{\mu}x \end{cases} \iff \frac{a}{r}y = \frac{ea}{\mu}x \iff y^* = \frac{er}{\mu}x^*$$

D'autre part, on a :

$$1 + bx + cy = \frac{ea}{\mu}x \iff 1 + bx + c\frac{er}{\mu}x = \frac{ea}{\mu}x \iff x^* = \frac{\mu}{ea - (b\mu + cer)}$$

Ce point d'équilibre appartient au cadran positif si :

$$ae > b\mu + cer$$

La matrice Jacobienne du système s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} r - \frac{ay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & -\frac{ax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \\ \frac{eay(1+cy)}{(1+bx+cy)^2} & -\mu + \frac{eax(1+bx)}{(1+bx+cy)^2} \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre  $(0, 0)$ , la matrice Jacobienne s'écrit :

$$A_0 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

L'origine est donc un point selle.

Au point d'équilibre non trivial, on utilise les relations d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{ay}{1+bx+cy} = r \\ \frac{eax}{1+bx+cy} = \mu \end{cases}$$

Il vient alors :

$$A^* = \begin{pmatrix} r - r \frac{1+cy}{1+bx+cy} & -\frac{\mu}{e} \frac{1+bx}{1+bx+cy} \\ er \frac{1+cy}{1+bx+cy} & -\mu + \mu \frac{1+bx}{1+bx+cy} \end{pmatrix}$$

On simplifie ensuite chacun des termes comme suit :

- $r - r \frac{1+cy}{1+bx+cy} = r \left(1 - \frac{1+cy}{1+bx+cy}\right) = r \frac{bx}{1+bx+cy} = \frac{rbx}{eax/\mu} = \frac{rb\mu}{ea}$
- $-\frac{\mu}{e} \frac{1+bx}{1+bx+cy} = -\frac{\mu}{e} \frac{(a/r-c)y}{ay/r} = \frac{\mu}{ea} (rc - a)$
- $er \frac{1+cy}{1+bx+cy} = er \frac{(ea/\mu-b)x}{eax/\mu} = \frac{r}{a} (ea - b\mu)$
- $-\mu + \mu \frac{1+bx}{1+bx+cy} = \mu \left(-1 + \frac{1+bx}{1+bx+cy}\right) = -\mu \frac{cy}{1+bx+cy} = -\frac{\mu cy}{ay/r} = -\frac{\mu cr}{a}$

Ainsi, la matrice Jacobienne au point d'équilibre non trivial s'écrit :

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{rb\mu}{ea} & \frac{\mu}{ea} (rc - a) \\ \frac{r}{a} (ea - b\mu) & -\frac{\mu cr}{a} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice s'écrit :

$$\begin{aligned} \det A^* &= -\frac{rb\mu}{ea} \frac{\mu cr}{a} - \frac{\mu}{ea} \frac{r}{a} (ea - b\mu)(rc - a) \\ &= -\frac{r\mu}{ea^2} (b\mu rc + rcea - b\mu rc - ea^2 + ab\mu) \\ &= \frac{r\mu}{ea} (ra - rce - b\mu) \end{aligned}$$

Du fait de la condition d'existence du point d'équilibre non trivial dans le cadran positif,  $ae > bm + cer$ , le déterminant est strictement positif. La trace de la matrice est donnée par :

$$tr A^* = \frac{rb\mu}{ea} - \frac{\mu cr}{a} = \frac{\mu r}{ea} (b - ec)$$

La trace s'annule lorsque  $b = ec$ ; elle est positive si  $b > ec$  et négative si  $b < ec$ . Ainsi, lorsque le paramètre  $b$  varie, la trace change de signe à déterminant strictement positif, ce qui conduit à la bifurcation de Hopf.

Vérifions que nous sommes dans les conditions d'application du théorème de P-A-H :

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \left(\frac{\mu r}{ea}\right)^2 (b - ec)^2 - 4 \frac{r\mu}{ea} (ea - rce - b\mu) \\ &= \frac{r\mu}{e^2 a^2} [r\mu (b^2 - 2bec + e^2 c^2) - 4ea(ea - rce - b\mu)] \end{aligned}$$

Difficile de trouver le signe de cette quantité ! Supposons que  $\Delta^* < 0$ ; alors les valeurs propres s'écrivent :

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr A^*}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2}$$

Ainsi :

$$Re(\lambda_i) = \frac{trA^*}{2} = \frac{\mu r}{2ea}(b - ec)$$

$$Im(\lambda_i) = \frac{\sqrt{|\Delta^*|}}{2} = \frac{r\mu}{2e^2a^2}[r\mu(b^2 - 2bec + e^2c^2) - 4ea(ea - rce - b\mu)]$$

En prenant comme paramètre de bifurcation le paramètre  $b$ , la valeur de bifurcation est  $b^* = ec$ , et il vient :

$$Re(b^*) = 0$$

$$\frac{dRe(\lambda_i)}{db} = \frac{\mu r}{2ea} > 0$$

$$Im(b^*) = -2\frac{r\mu}{ea}(ea - rce - b\mu) \neq 0$$

Les conditions du théorème de P-A-H étant réunies, nous sommes bien en présence d'une bifurcation P-A-H.

Par simulation, on vérifie qu'il y a de centres à la bifurcation et qu'il s'agit donc d'une bifurcation de P-A-F dégénérée (Figure 22).

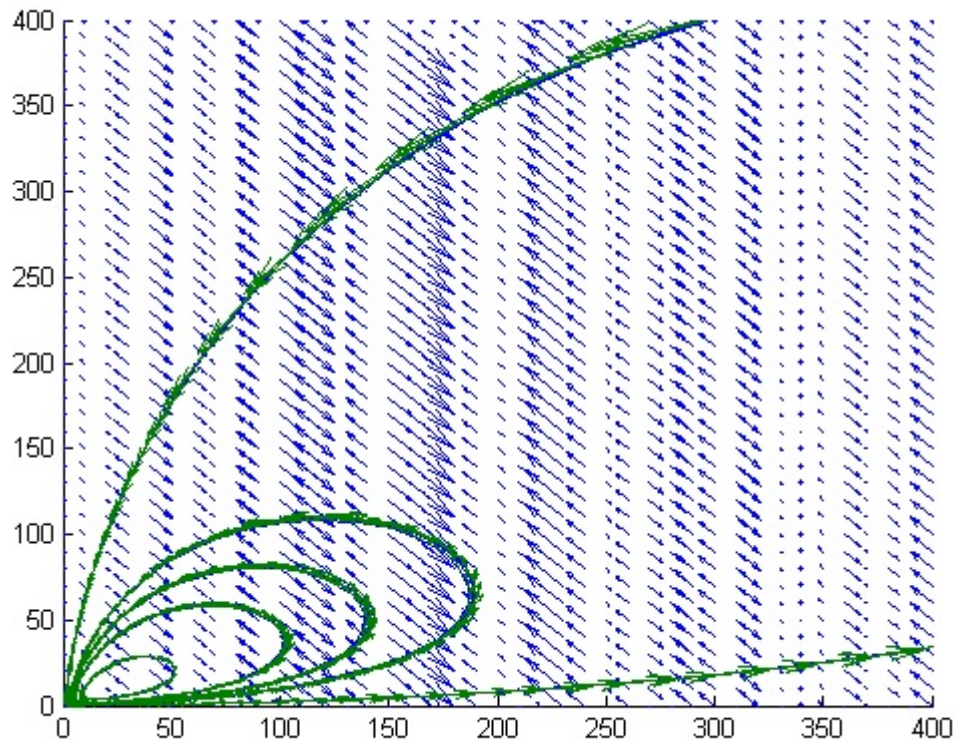


Figure 22 : Portrait de phase du modèle de Beddington à la bifurcation, pour  $b = ec$

### 3.2 LE MODÈLE SI

$$\begin{cases} \dot{S} = -r\beta S \frac{I}{N} \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$N$  : le nombre total de population

$S$  : le nombre de susceptibles.

$I$  : le nombre des infectés.

$r$  : le nombre des contacts par unité de surface.

$\beta$  : la probabilité de transmission.

On introduit aussi le terme

$R_0$  : le taux de reproduction de base, est défini comme étant le nombre moyen de nouveaux cas d'infection, engendrés par un individu infecté (au cours de sa période d'infectiosité). On renvoie le lecteur au papier [4] et les références présents dans sa bibliographie, pour une large description de cette notion et des différentes manières de calculer  $R_0$

Ce modèle peut décrire -entre autres- le déclenchement d'une épidémie où un individu susceptible entre dans le compartiment des infectés et il le demeure pour le restant de sa vie. C'est le cas par exemple pour le HIV.

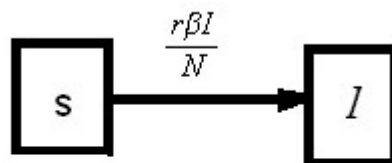


Figure 23

$$N = S + I \implies \dot{N} = \dot{S} + \dot{I} = 0$$

Le nombre de la population  $N$  est constant ; donc on peut écrire  $S = N - I$

c.à.d la dynamique des susceptibles dépend uniquement des infectés  $I$

Le système réduit est :

$$\dot{I} = r\beta(N - I)\frac{I}{N} \quad (3.3)$$

les points d'équilibre sont  $I_{dfe} = 0$  et  $I_{ee} = N$

### Analyse de stabilité

soit

$$f(I) = r\beta(N - I)\frac{I}{N}$$

alors

$$f'(I) = r\beta - \frac{2r\beta I}{N}$$

$f'(0) = r\beta > 0 \implies I_{dfe}$  est instable

$f'(N) = r\beta - 2r\beta = -r\beta < 0 \implies I_{ee}$  est asymptotiquement stable.

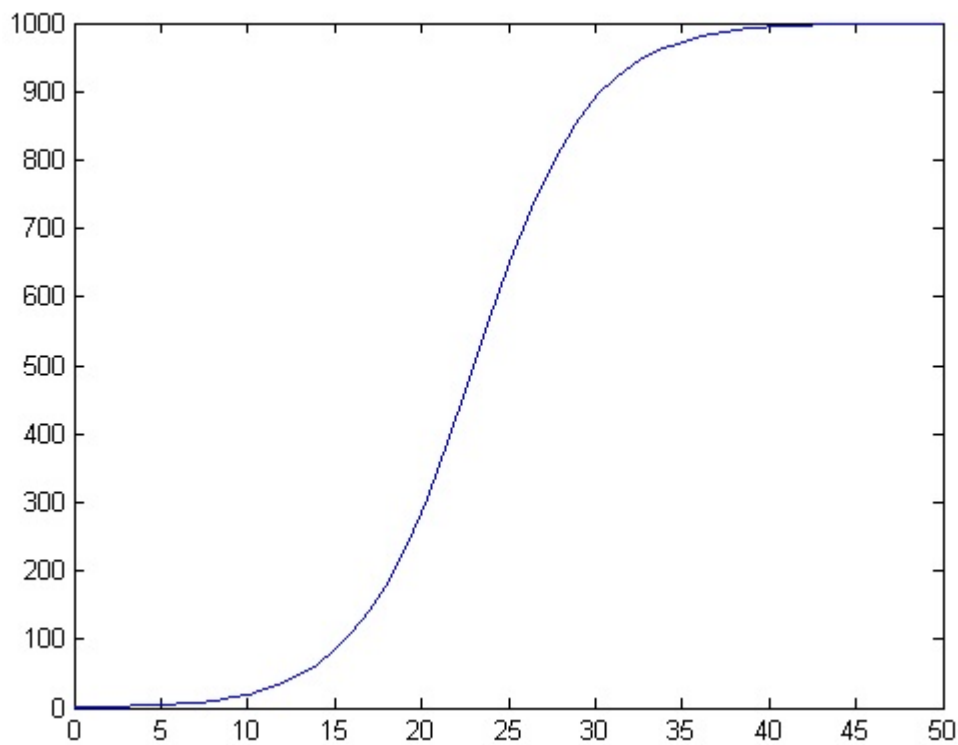


Figure 24 : simulation numérique du modèle SI avec  $r = 6$ ;  $\beta = 0.05$  et les conditions initiales  $S(0) = 999$  et  $I(0) = 0$



## 3.3 LE MODÈLE SIS

$$\begin{cases} \dot{S} = -r\beta S \frac{I}{N} + \gamma I \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} - \gamma I \end{cases} \quad (3.4)$$

avec  $\gamma$  : est le taux de guérison

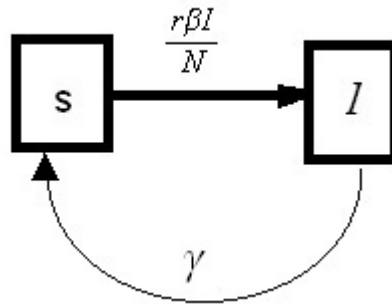


Figure 25

$$N = S + I \implies \dot{N} = \dot{S} + \dot{I} = 0$$

alors la population est constante

$$R_0 = \frac{r\beta}{\gamma}$$

on peut remplacer  $S$  par  $N - I$

le système réduit est donné par :

$$\dot{I} = r\beta(N - I) \frac{I}{N} - \gamma I \quad (3.5)$$

les points d'équilibre :

soit :

$$f(I) = I\left(r\beta - I \frac{r\beta}{N} - \gamma\right) \quad (3.6)$$

les points d'équilibres sont des solutions de l'équation  $f(I) = 0$  et égale à :

$$I_{dfe} = 0 \quad \text{et} \quad I_{ee} = (r\beta - \gamma) \frac{N}{r\beta}$$

$$I_{ee} \text{ existe ssi } r\beta - \gamma > 0 \implies R_0 > 1$$

$$f'(I) = r\beta - \gamma - 2\frac{r\beta I}{N}$$

$$f'(I_{dfe}) = r\beta - \gamma > 0 \text{ ssi } R_0 > 1$$

alors  $I_{dfe}$  est asymptotiquement stable si  $R_0 < 1$  et instable si  $R_0 > 1$

$$f'(I_{ee}) = r\beta - \gamma - 2(r\beta - \gamma) = -(r\beta - \gamma) < 0 \text{ ssi } R_0 > 1$$

alors l'équilibre endémique est stable s'il existe .

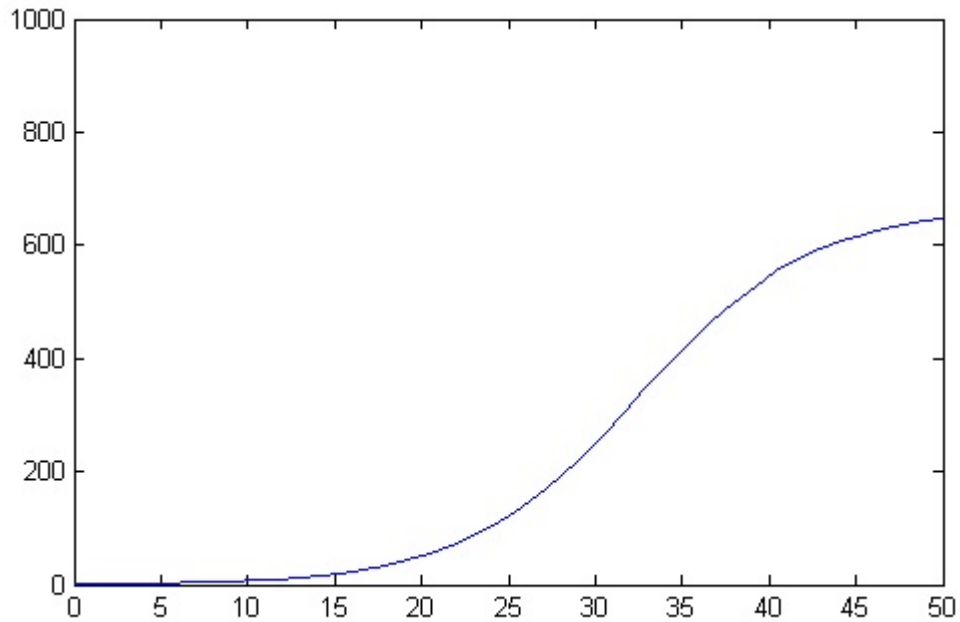


Figure 26 : simulation numérique du modèle SIS avec  $r = 6$ ;  $\beta = 0.05$  et

$$\gamma = 0.1 \text{ et les conditions initiales } S(0) = 999 \text{ et } I(0) = 0$$

et le diagramme de bifurcation est le suivant :

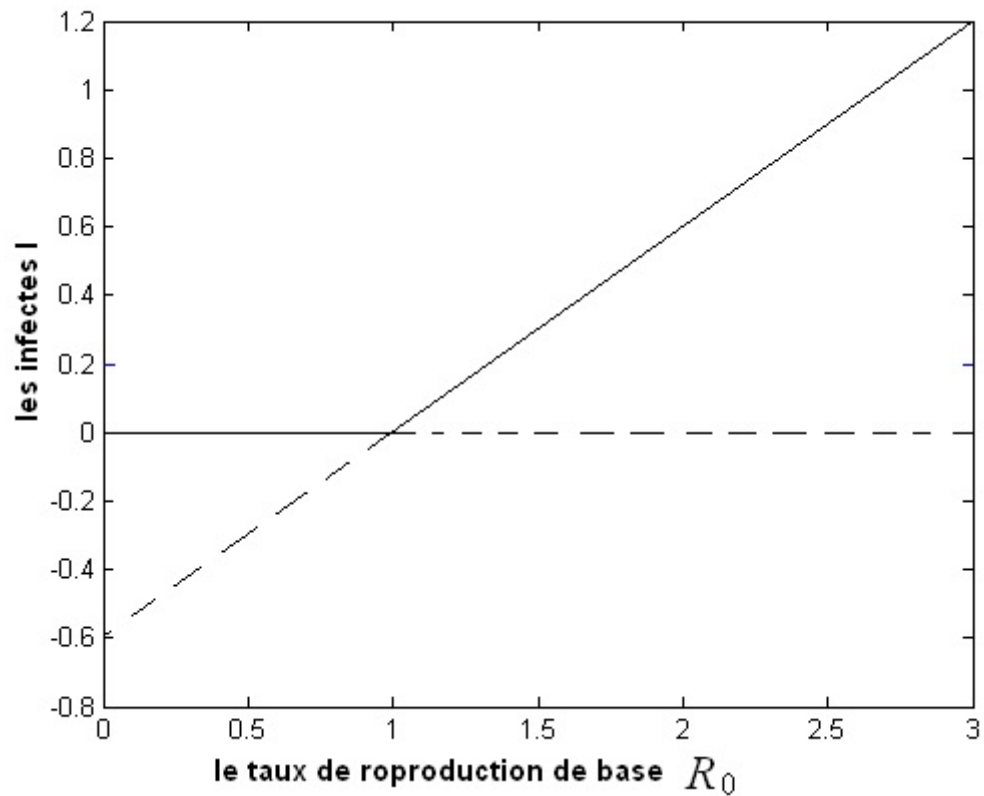


Figure 27 : bifurcation transcritique pour le modèle SIS

### 3.4 LE MODÈLE SIR

le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = -r\beta S \frac{I}{N} \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases} \quad (3.7)$$

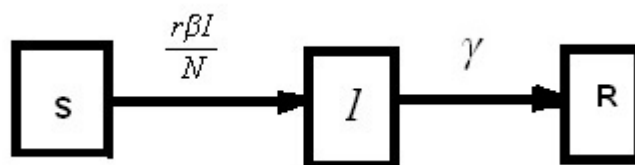


Figure 28

dans ce cas si l'individu entre dans le compartiment des réfractaires il devient immunisé ( pour toujours ) contre la maladie

$\frac{1}{\gamma}$  : est la période d'infectiosité

$\gamma$  : est le taux de guérison .

$$N = S + I + R \implies \dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$$

alors la population est constante

le système réduit est :

$$\begin{cases} \dot{S} = -r\beta S \frac{I}{N} \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} - \gamma I \end{cases} \quad (3.8)$$

et le  $R_0 = \frac{r\beta}{\gamma}$  ; posons :  $s = \frac{S}{N}$  et  $i = \frac{I}{N}$  alors le système (3.8) devient :

$$\begin{cases} \dot{s} = -r\beta si \\ \dot{i} = r\beta si - \gamma i \end{cases} \quad (3.9)$$

les points d'équilibres de (3.9) sont :

$$(\zeta, 0) \quad \forall \zeta \in [0, 1]$$

**Analyse de la stabilité :**  $J(s, i) = \begin{pmatrix} -r\beta i & -r\beta s \\ r\beta i & r\beta s - \gamma \end{pmatrix}$  est la matrice jacobienne de système (3.9)

$J(\zeta, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -r\beta\zeta \\ 0 & r\beta\zeta - \gamma \end{pmatrix}$  les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = r\beta\zeta - \gamma$  si  $\lambda_2 > 0$  ie  $r\beta\zeta - \gamma > 0$  alors  $\zeta > \frac{1}{R_0}$  dans ce cas  $(\zeta, 0)$  est instable ; et si  $\zeta < \frac{1}{R_0}$  alors le système prévoit des centres

la simulation numérique :

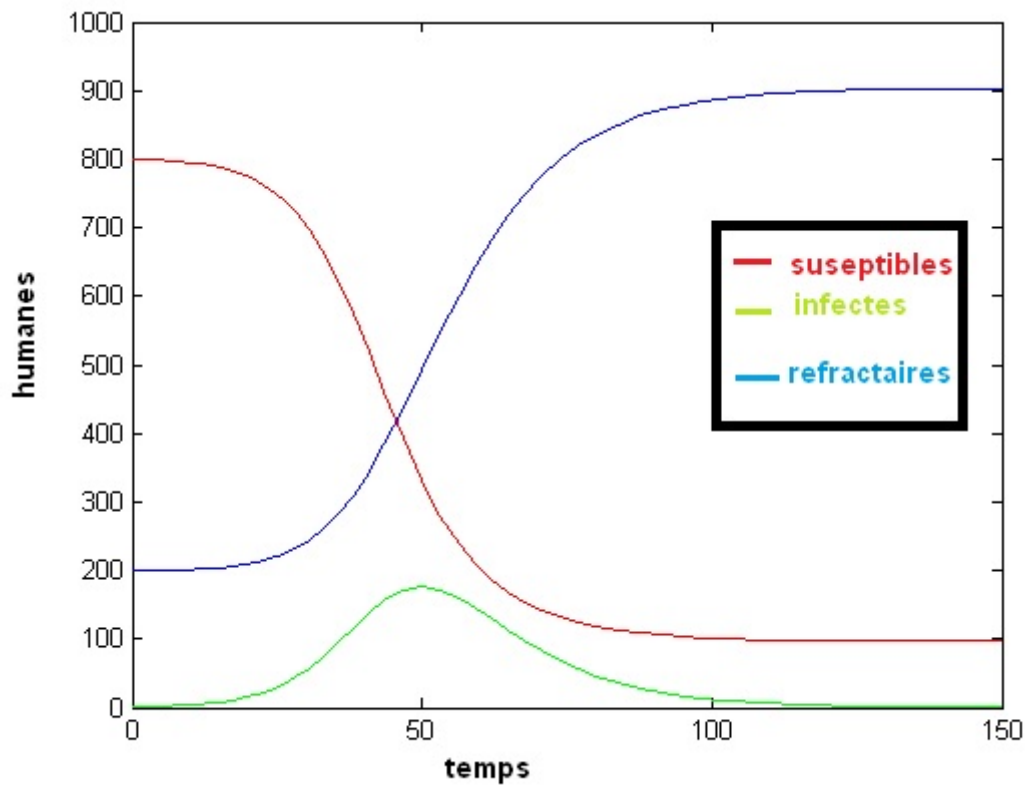


Figure 29

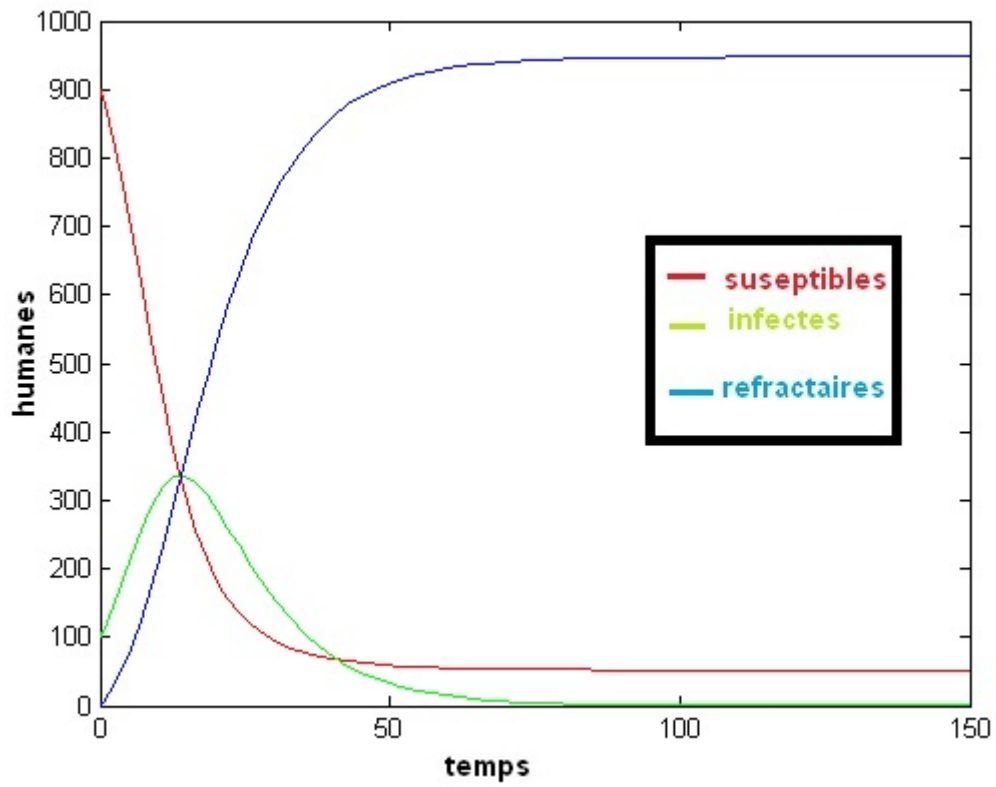


Figure 30

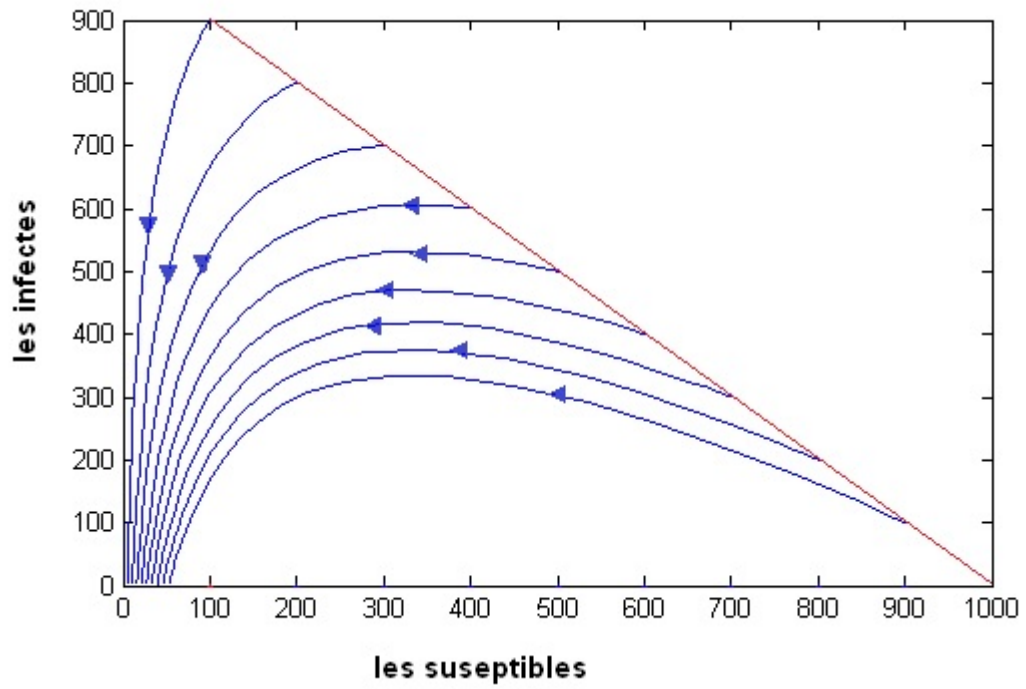


Figure 31

### 3.5 LE MODÈLE SIR (AVEC ÉTAT ENDÉMIQUE)

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - r\beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R \end{cases} \quad (3.10)$$

avec  $\mu$  : est le taux de mortalité (naturelle).

$\Lambda$  : est le nombre des naissances.

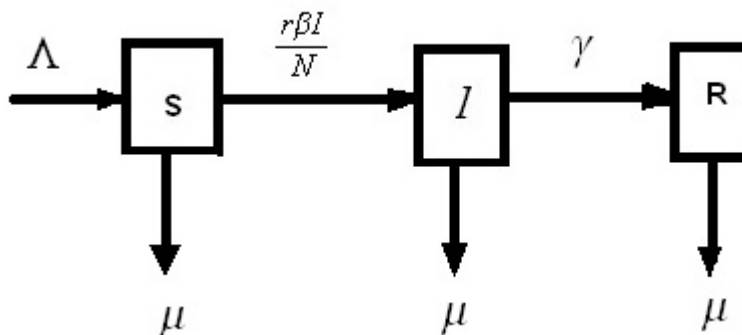


Figure 32

$$N = S + I + R \implies \dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = \Lambda - \mu N$$

dans ce cas la population n'est pas constante mais admet  $N^* = \frac{\Lambda}{\mu}$

comme point d'équilibre globalement stable.

Choisissons  $a > 0$  et  $\varepsilon \ll 1$  tels que  $\forall t > a \implies |N(t) - N^*| < \varepsilon$

pour  $t > a$  on peut considérer que la population est constante  $N \simeq N^*$

$$\text{dans ce cas } R_0 = \frac{r\beta}{\gamma + \mu}$$

les points d'équilibres sont :  $(S_{dfe}, I_{dfe}, R_{dfe}), (S_{ee}, I_{ee}, R_{ee})$  avec :

$$(S_{dfe}, I_{dfe}, R_{dfe}) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$$

et

$$\begin{aligned} (S_{ee}, I_{ee}, R_{ee}) &= \left(\frac{\Lambda(\gamma + \mu)}{\mu r \beta}, \frac{\Lambda(r\beta - (\gamma + \mu))}{r\beta(\gamma + \mu)}, \frac{\Lambda\gamma(r\beta - (\gamma + \mu))}{\mu r \beta(\gamma + \mu)}\right) \\ &= \left(\frac{N^*}{R_0}, \frac{N^*}{r\beta}(R_0 - 1), \frac{\gamma N^*}{r\beta}(R_0 - 1)\right) \end{aligned}$$

l'équilibre endémique existe ssi  $R_0 > 1$ .

**Analyse de la stabilité :** si  $t > a \implies R = N - I - S$  le système réduit est :

$$\begin{cases} \dot{S} = \Lambda - r\beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \dot{I} = r\beta S \frac{I}{N} - \gamma I - \mu I \end{cases} \quad (3.11)$$

le matrice jacobienne est :

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -r\beta \frac{I}{N} - \mu & -r\beta \frac{S}{N} \\ r\beta \frac{I}{N} & r\beta \frac{S}{N} - \gamma - \mu \end{pmatrix}$$

analyse de la stabilité de  $(S_{dfe}, I_{dfe})$

$$J(S_{dfe}, I_{dfe}) = \begin{pmatrix} -\mu & -r\beta \\ 0 & r\beta - \gamma - \mu \end{pmatrix} \text{ est stable ssi } R_0 < 1 \text{ sinon il est}$$

instable

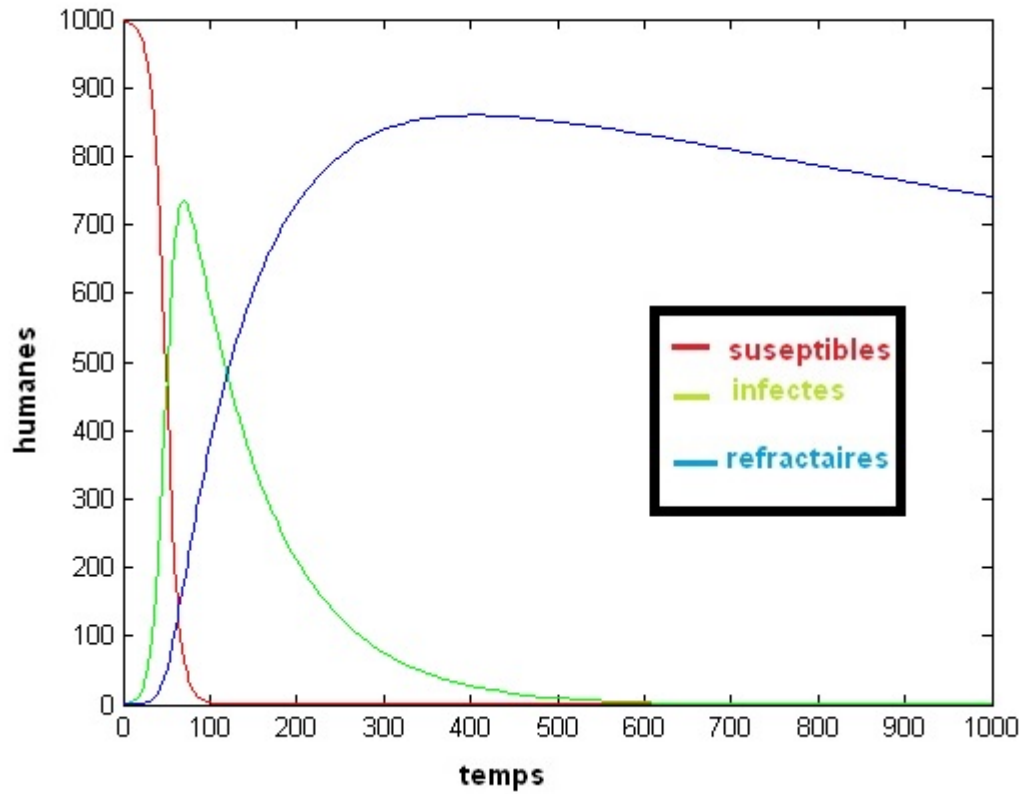


Figure33

analyse de stabilité de  $(S_{ee}, I_{ee})$

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -r\beta \frac{I_{ee}}{N} - \mu & -r\beta \frac{S_{ee}}{N} \\ r\beta \frac{I_{ee}}{N} & r\beta \frac{S_{ee}}{N} - \gamma - \mu \end{pmatrix}$$

équivalent à

$$J(S_{ee}, I_{ee}) = \begin{pmatrix} -\mu R_0 & -(\gamma + \mu) \\ \mu(R_0 - 1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}J(S_{ee}, I_{ee}) = -\mu R_0 < 0 \quad \text{et} \quad \det J(S_{ee}, I_{ee}) = -\mu(R_0 - 1)(\gamma + \mu)$$

• si  $R_0 > 1$  alors  $\det J(S_{ee}, I_{ee}) < 0$  donc l'équilibre endémique il est point-selle s'il existe.



## LA BIFURCATION BACKWARD

Il est apparu ces dernières décennies un nouveau type de bifurcations, qui trouve en particulier un large champ d'application dans les systèmes épidémiologiques. Ces bifurcations sont dites "backward". Il est actuellement de notoriété que selon que le taux de reproduction de base  $R_0$  soit supérieur ou inférieur à 1, le point d'équilibre sans épidémie est instable ou stable et inversement pour le point d'équilibre endémique. Comme on le verra dans ce chapitre, cet a priori peut être "tordu" grâce, ou à cause de la présence d'une bifurcation backward.

Ce chapitre est essentiellement inspiré de l'article [6].

### 4.1 EXEMPLE DE BIFURCATION BACKWARD AVEC UNE FONCTION DE TRAITEMENT :

Soit le modèle SIR :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS - \lambda SI \\ \dot{I} = \lambda SI - (d + \gamma)I - h(I) \\ \dot{R} = \gamma I + h(I) - dR \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$h(I) = \begin{cases} r & \text{si } I > 0 \\ 0 & \text{si } I = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 interprétation des termes du modèle :

$A$  : le nombre des naissances susceptibles dans ce modèle les naissances sont automatiquement susceptibles (on n'a pas une transmission verticale).

$d$  : le taux de mortalité naturelle et ceci est supposé constant pour toutes les classes des individus .

$\lambda$  : le taux de transmission .

$\gamma$  : le taux de guérison (naturelle).

$h(I)$  : est la fonction de traitement qui représente le nombres des individus traités .

$r$  : le nombre de médicament stocké .

$S$  : le nombre des susceptibles .

$I$  : le nombre des infectés .

$R$  : le nombre des réfractaires.

$R_0$  : est le nombre moyen des nouveaux cas infectés produits par un individu infecté pendant la période d'infection.

#### 4.1.2 Les points d'équilibres :

si  $I(t_0) = 0$ , le système devient :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS \\ I = 0 \\ \dot{R} = -dR \end{cases} \quad (4.3)$$

alors  $S^* = \frac{A}{d}$  ,  $I^* = 0$  , et  $R^* = 0$

$(\frac{A}{d}, 0, 0)$  est l'équilibre en l'absence de l'épidémie , et il est globalement stable .

$$\begin{cases} s(t) = s(t_0)e^{-dt} + \frac{A}{d}(1 - e^{-dt}) \\ I(t) = 0 \\ R(t) = R(t_0)e^{-dt} \end{cases} \quad (4.4)$$

on va s'intéresser au cas  $I > 0$ .

Les deux premières équations ne dépendent pas de  $R$  alors nous allons étudier la stabilité de celles-ci (la stabilité de  $S$  et  $I$  impliquera la stabilité de  $R$ )

Le système devient :

$$\begin{cases} \dot{S} = A - dS - \lambda SI \\ \dot{I} = \lambda SI - (d + \gamma)I - r \end{cases} \quad (4.5)$$

Du fait que  $N = S + I + R$ ,

alors  $\dot{N} = \dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = A - dN$

$$N(t) = N(t_0)e^{-dt} + \frac{A}{d}(1 - e^{-dt})$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{d}$$

donc  $N^* = \frac{A}{d}$  est globalement stable

donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists a > 0$  telle que  $\forall t > a$  alors

$$\left| N(t) - \frac{A}{d} \right| < \varepsilon,$$

choisissons  $\varepsilon \ll 1$  alors il existe  $a$  tel que  $\forall t > a$  alors

$$\left| N(t) - \frac{A}{d} \right| < \varepsilon,$$

dans ce cas on peut considérer que la population est constante à long terme, et dans ce cas on peut écrire  $N(t) = N^* = \frac{A}{d}$  pour  $t > a$ .

### Calcul du taux de reproduction de base $R_0$

l'équilibre sans épidémie est  $(\frac{A}{d}, 0, 0)$

$\mathcal{P} = \lambda SI$  alors  $P = \frac{\lambda A}{d}$

et  $\mathcal{V} = -(d + \gamma)I - r$  alors  $V = -(d + \gamma)$  qui est implique que

$$-V^{-1} = \frac{1}{d + \gamma}$$

$$\text{alors } R_0 = -PV^{-1} = \frac{\lambda A}{d(d + \gamma)}$$

### Calcul des points d'équilibres endémiques

$$\dot{S} = 0 \text{ et } \dot{I} = 0$$

$$\text{alors } A - dS - \lambda SI = 0 \text{ qui est implique que } S = \frac{A}{d + \lambda I}$$

$$\text{et } \lambda SI - (d + \gamma)I - r = 0$$

remplaçons  $S$  par sa valeur :

$$\lambda \frac{A}{d + \lambda I} I - (d + \gamma)I - r = 0$$

multiplions par  $d + \lambda I$  on trouve

$$\lambda AI - d(d + \gamma) - \lambda(d + \gamma)I^2 - r(d + \lambda I) = 0$$

$$-\lambda(d + \gamma)I^2 - I(d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda) - rd = 0$$

divisons par  $-d(d + \gamma)$

$$\frac{\lambda}{d} I^2 - \left( \frac{\lambda A}{d(d + \gamma)} - \frac{r\lambda}{d(d + \gamma)} - 1 \right) I + \frac{r}{d + \gamma} = 0$$

$$\frac{\lambda}{d} I^2 - (R_0 - H - 1)I + \frac{r}{d + \gamma} = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{avec } H = \frac{\lambda r}{d(d + \gamma)}$$

### discussion :

$$\text{soit } f(I) = \frac{\lambda}{d} I^2 - (R_0 - H - 1)I + \frac{r}{d + \gamma} = 0$$

$$f'(I) = 2\frac{\lambda}{d} I - (R_0 - H - 1) = 0$$

$$\text{alors } I = \frac{d(R_0 - H - 1)}{2\lambda} \text{ et } f(0) = \frac{r}{d + \gamma}$$

donc si  $R_0 - H - 1 < 0$  alors (4.6) n'admet pas des solution positive

et la même chose pour  $R_0 < 1$  (ie on a l'absence des équilibres endémiques dans ce cas )

on va s'intéresser au  $R_0 - H - 1 > 0$  ( $R_0 > 1$ )

$$\begin{aligned} \Delta &= (R_0 - H - 1)^2 - 4H \\ &= (R_0 - H - 1 - 2\sqrt{H})(R_0 - H - 1 + 2\sqrt{H}) \\ &= (R_0 - (\sqrt{H} + 1)^2)(R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2) \end{aligned}$$

$R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2$  est positif pour  $R_0 - H - 1 > 0$

car  $R_0 - (\sqrt{H} - 1)^2 = R_0 - H - 1 + 2\sqrt{H} > R_0 - H - 1 > 0$

ie  $\Delta > 0$  si et seulement si  $R_0 - (\sqrt{H} + 1)^2 > 0$

alors  $\sqrt{R_0} - 1 > \sqrt{H} > 0$

$(\sqrt{R_0} - 1)^2 > H$

et  $\Delta < 0$  si et seulement si  $(\sqrt{R_0} - 1)^2 < H$

et  $\Delta = 0$  si et seulement si  $(\sqrt{R_0} - 1)^2 = H$

On va s'intéresser au cas  $\Delta > 0$

alors les points d'équilibre sont :

$$I_1 = \frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H - \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H})$$

$$\text{et } I_2 = \frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H})$$

mais  $I_1$  et  $I_2$  sont simultanément positifs si et seulement si  $R_0 - 1 - H >$

0

alors  $R_0 - 1 > H$

et on a  $R_0 - 1 = (\sqrt{R_0} - 1)(\sqrt{R_0} + 1) > (\sqrt{R_0} - 1)^2 > H$

donc pour  $\Delta > 0$  on a  $I_1$  et  $I_2$  coexistent avec  $S_1 = \frac{A}{d + \lambda I_1}$  et  $S_2 = \frac{A}{d + \lambda I_2}$

### 4.1.3 Analyse de la stabilité

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - d - \gamma \end{pmatrix}$$

$$J_1(S_1, I_1) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I_1 & -\lambda S_1 \\ \lambda I_1 & \lambda S_1 - d - \gamma \end{pmatrix}$$

L'équilibre vérifie  $A - dS_1 = \lambda S_1 I_1 = (d + \gamma)I_1 + r$

alors  $S_1 = \frac{1}{d}(A - (d + \gamma)I_1 - r)$

$$\begin{aligned} \det J_1 &= (-d - \lambda I_1)(\lambda S_1 - d - \gamma) + \lambda^2 S_1 I_1 \\ &= -d\lambda S_1 + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_1 \\ &= -\lambda(A - (d + \gamma)I_1 - r) + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_1 \\ &= -\lambda A + 2\lambda(d + \gamma)I_1 + \lambda r + d(d + \gamma) \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + \frac{2\lambda}{d}I_1 + H + 1\right] \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + H + 1 + R_0 - H - 1 - \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}\right] \\ &= -d(d + \gamma)\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} < 0 \end{aligned}$$

donc  $I_1$  est un point selle s'il existe

$$J_2(S_2, I_2) = \begin{pmatrix} -d - \lambda I_2 & -\lambda S_2 \\ \lambda I_2 & \lambda S_2 - d - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{et } S_2 = \frac{1}{d}(A - (d + \gamma)I_2 - r)$$

$$\begin{aligned} \det J_2 &= (-d - \lambda I_2)(\lambda S_2 - d - \gamma) + \lambda^2 S_2 I_2 \\ &= -d\lambda S_2 + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_2 \\ &= -\lambda(A - (d + \gamma)I_2 - r) + d^2 + d\gamma + \lambda(d + \gamma)I_2 \\ &= -\lambda A + 2\lambda(d + \gamma)I_2 + \lambda r + d(d + \gamma) \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + \frac{2\lambda}{d}I_2 + H + 1\right] \\ &= d(d + \gamma)\left[-R_0 + H + 1 + R_0 - H - 1 + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}\right] \\ &= d(d + \gamma)\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > 0 \end{aligned}$$

alors la stabilité de  $J_2$  dépend seulement de  $\text{tr}J_2$

si  $\text{tr}J_2 > 0$  alors  $E_2$  est instable .

et si  $\text{tr}J_2 < 0$  alors  $E_2$  est localement asymptotiquement stable .

$$\begin{aligned} \text{tr}J_2 &= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \lambda S_2 \\ &= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \frac{\lambda}{d}(A - (d + \gamma)I_2 - r) \\ &= -2d - \gamma - \lambda I_2 + \frac{\lambda A}{d} - \frac{\lambda}{d}(d + \gamma)I_2 - \frac{\lambda r}{d} \\ &= -\lambda I_2 \frac{2d + \gamma}{d} - \frac{2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d}{d} \end{aligned}$$

si  $2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0$  par suite  $\text{tr}J_2 < 0$  dans ce cas  $E_2$  est localement asymptotiquement stable.

Supposons que  $2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0$  on cherche  $\text{tr}J_2 < 0$

$$\begin{aligned} -\lambda I_2 \frac{2d + \gamma}{d} - \frac{2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d}{d} &< 0 \\ I_2 &> \frac{-2d^2 + \lambda A - \lambda r - \gamma d}{\lambda(2d + \gamma)} = D_1 > 0 \\ \frac{d}{2\lambda}(R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H}) &> \frac{d(d + \gamma)}{\lambda(2d + \gamma)} \left[-\frac{d}{d + \gamma} - 1 + R_0 - H\right] \\ R_0 - 1 - H + \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} &> -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \frac{2d + 2\gamma}{2d + \gamma} \\ \sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} &> -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H) \left[\frac{2d + 2\gamma}{2d + \gamma} - 1\right] \end{aligned}$$

alors

$$\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > -\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H)\frac{\gamma}{2d + \gamma} = D_2$$

$$\sqrt{(R_0 - 1 - H)^2 - 4H} > \frac{\gamma}{2d + \gamma}\left[R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\gamma}\right]$$

si  $R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\gamma} < 0$  alors  $trJ_2 < 0$  et par suit  $E_2$  est localement asymptotiquement stable supposons que  $R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} > 0$  alors

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H > \left[-\frac{2d}{2d + \gamma} + (R_0 - 1 - H)\frac{\gamma}{2d + \gamma}\right]^2$$

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H - D_2^2 > 0$$

$$(R_0 - 1 - H)^2 - 4H - (R_0 - 1 - H)^2\frac{\gamma^2}{(2d + \gamma)^2} - \frac{4d^2}{(2d + \gamma)^2} + \frac{4\gamma d}{(2d + \gamma)^2}(R_0 - 1 - H) > 0$$

$$(d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda)^2\frac{4d(d + \gamma)}{d^2(2d + \gamma)^2} - 4\frac{\lambda r}{(d + \gamma)} - \frac{4d^2}{(2d + \gamma)^2}$$

$$+ 4\frac{d\gamma}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)}(-d(d + \gamma) + \lambda A - r\lambda) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)}[-\lambda r(2d + \gamma)^2 - d^3(d + \gamma) + (d(d + \gamma) - \lambda A + r\lambda)^2$$

$$+ d\gamma(-d(d + \gamma) + \lambda A - r\lambda)] > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)}[-\lambda r(4d^2 + \gamma^2 + 4d\gamma)$$

$$- d^4 - \gamma d^3 + \lambda^2 A^2 + \lambda^2 r^2 - 2\lambda^2 Ar + d^2(d^2 + \gamma^2 + 2d\gamma)$$

$$- 2(\lambda A - r\lambda)(d^2 + d\gamma) + d\gamma\lambda A - d\gamma\lambda r - \gamma d^3 - \gamma^2 d^2] > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)}[-4\lambda r d^2 - \lambda r \gamma^2 - 4d\gamma\lambda r - d^4 - \gamma d^3 +$$

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 r^2 - 2\lambda^2 Ar + d^4 + d^2\gamma^2$$

$$+ 2\gamma d^3 - 2\lambda A d^2 - 2\lambda A d\gamma + 2r\lambda d^2 +$$

$$2r\lambda d\gamma + d\gamma\lambda A - d\gamma\lambda r - \gamma d^3 - \gamma^2 d^2] > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4\lambda}{d(2d + \gamma)^2(d + \gamma)}[\lambda r^2 + r(-2d^2 - 3d\gamma - \gamma^2 - 2\lambda A) + \lambda A^2 - Ad\gamma - 2Ad^2] > 0$$

posons  $D_3 = \lambda r^2 + r(-2d^2 - 3d\gamma - \gamma^2 - 2\lambda A) + \lambda A^2 - Ad\gamma - 2Ad^2$

si  $D_3 > 0$  alors  $trJ_2 < 0$  et par suit  $E_2$  est localement asymptotiquement stable.

Si  $D_3 < 0$  alors  $trJ_2 > 0$  donc  $E_2$  est instable .

Considérons  $D_3$  comme fonction de la variable  $r$ , et étudions son signe.

$$\Delta_1 = ((2d + \gamma)(d + \gamma) + 2\lambda A)^2 - 4\lambda A(\lambda A - d\gamma - 2d^2)$$

$$= (2d + \gamma)^2(d + \gamma)^2 + 4\lambda^2 A^2 + 4\lambda A(2d + \gamma)(d + \gamma) - 4\lambda^2 A^2 + 4\lambda Ad\gamma + 8\lambda Ad^2$$

$$= (2d + \gamma)^2(d + \gamma)^2 + 4\lambda A(2d + \gamma)(d + \gamma) + 4\lambda Ad\gamma + 8\lambda Ad^2 > 0$$

donc  $r_1 = \frac{1}{2\lambda}[2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) + \sqrt{\Delta_1}]$  et  $r_2 = \frac{1}{2\lambda}[2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) - \sqrt{\Delta_1}]$

et le signe de  $D_3$  est donné par

$r$					
$D_3$	$r_2$		$r_1$		
$D_3$	+	○	-	○	+

Figure 33

si  $r > r_1$  ou  $r < r_2$  alors  $D_3 > 0$  par suit  $trJ_2 < 0$

et si  $r_2 < r < r_1$  alors  $D_3 < 0$  par suit  $trJ_2 > 0$ .

Par la condition

$$2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0$$

soit

$$-2d^2 + \lambda A - \gamma d < \lambda r$$

$$\begin{aligned} \lambda r_1 &= \frac{1}{2}[2\lambda A + (2d + \gamma)(d + \gamma) + \sqrt{\Delta_1}] \\ &= \lambda A + d^2 + \frac{3}{2}d\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 + \sqrt{\Delta_1} > \lambda A - \gamma d - 2d^2 \end{aligned}$$

donc la condition  $r > r_1$  est éliminée

#### 4.1.4 Résumé :

$E_2$  est stable si

(i) :  $2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0$

ou

(ii) :  $\begin{cases} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} < 0 \end{cases}$

ou

(iii) :  $\begin{cases} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} > 0 \\ \text{et } r < r_2 \end{cases}$

$E_2$  est instable si



$$\begin{cases} 2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d < 0 \\ \text{et } R_0 - 1 - H - \frac{2d}{\lambda} > 0 \\ \text{et } r_1 > r > r_2 \end{cases}$$

et le diagramme de bifurcation backward est le suivant :

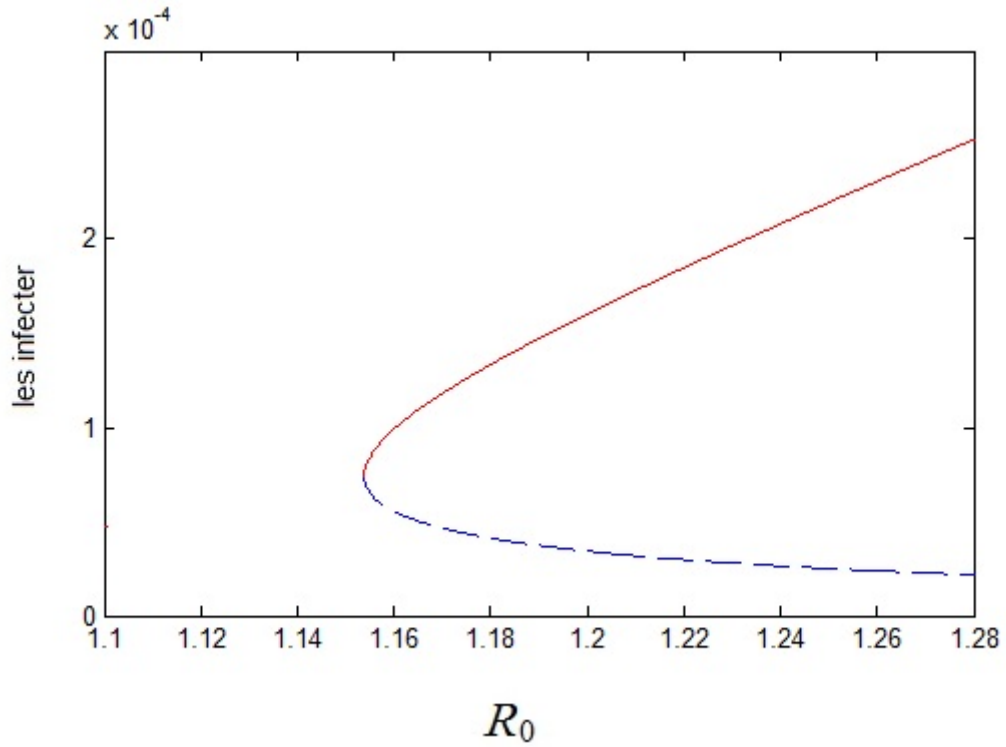


Figure 34

Représente les infectés en fonction de  $R_0$  avec  $\lambda = 0.01$ ,  $r = 0.05$ ,  $d = 0.1$  et  $\gamma = 1$  et la valeur du point de retour est  $R_0 = 1.538$  et  $E_2$

existe et est localement asymptotiquement stable car

$$2d^2 - \lambda A + \lambda r + \gamma d > 0 \text{ et équivalent à } R_0 < 1 + \frac{d^2 + d\gamma}{d(d + \gamma)} = 1.66$$

**Remarque 4.1** *On pourrait penser que la bifurcation backward est une conséquence du saut ( de la discontinuité ) de la fonction de traitement  $h$ , mais cela n'est pas le cas ; en effet comme cela est démontré dans [7] et [9], même si l'on considère comme fonction de traitement*

$$h(I) = \begin{cases} rI & \text{si } 0 \leq I \leq I_0 \\ rI_0 & \text{si } I > I_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

ou encore

$$h(I) = \frac{rI}{1 + \alpha I}$$

*r et  $\alpha$  des constantes convenablement choisies ; on arrive à démontrer (avec de légères modifications et de lourdes complications calculatoires) la présence d'une bifurcation backward.*

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Auger, Pierre. Lett, Christophe. Poggiale, Jean-Christophe. *Modélisation mathématique en écologie : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2010.
- [2] Charles, S. *Cours de M1 Biologie mathématique et modélisation*, Université Lyon1, 2007. 2, 15
- [3] Hale, Jack K. Hüseyin, Koçak. *Dynamics and bifurcations*, Springer, 1991. 15, 17
- [4] Heesterbeek, J. A. P. *A brief history of  $R_0$  and a recipe for its calculation*, Acta Biotheorica. 2002, vol 50, p. 189-204. 39
- [5] Strogatz, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos*, Perseus Publishing, 2006. 15
- [6] Wang, Wendi et Ruan, Shigui. *Bifurcations in an epidemic model with constant removal rate of the infectives*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, vol. 291, no 2, p. 775-793. 49
- [7] Wang, Wendi. *Backward bifurcation of an epidemic model with treatment*. *Mathematical biosciences*, 2006, vol. 201, no 1, p. 58-71. 57
- [8] Wiggins, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, second edition*, Springer-Verlag, 2000. 33
- [9] Zhang, Xu et Liu, Xianning. *Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function*, Journal of mathematical analysis and applications, 2008, vol. 348, no 1, p. 433-443. 57



**Titre** Théorie des bifurcations à travers quelques exemples issus de la dynamique des populations

**Résumé** Le résumé en français ( $\approx 1000$  caractères)

**Mots-clés** Les mots-clés en français

**Title** Le titre en anglais

**Abstract** Le résumé en anglais ( $\approx 1000$  caractères)

**Keywords** Les mots-clés en anglais