Problème anisotrope avec terme singulier à exposant variable

Sofiane El-Hadi MIRI,

LANMA, Université de Tlemcen, Algérie,

mirisofiane@yahoo.fr,

Abstract. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^{\gamma(x)}} & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases}$$

où

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right],$$

$\gamma(x) > 0$ est supposée être une fonction régulière, et Ω un domaine borné régulier de $I\!R^N$. On supposera également que f est une fonction positive appartenant à un espace de Lebesgue convenable $L^m(\Omega)$. En utilisant des arguments d'approximation, on arrive à démontrer l'existence d'une solution positive et à établir sa régularité.

Key words : Problème anisotrope, Nonlinéarité singulière, exposant variable.

1 Introduction

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^{\gamma(x)}} & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right],$$

$\gamma(x) > 0$ est supposée être une fonction régulière, par exemple $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$, et Ω un domaine borné régulier de $I\!R^N$. On supposera sans perte de généralité que $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction positive appartenant à un espace de Lebesgue convenable $L^m(\Omega)$.
Les problèmes élliptiques avec une nolinéarité singulière au second membre, ont été traités par différents auteurs, nous nous sommes en particulier inspirés dans cette communication, des travaux [1, 2, 3].
Les problèmes anisotropes sont eux aussi abondamment traités dans la littérature, nous citerons en particulier les travaux [4, 5, 6].
Le cadre fonctionnel naturel associé à l'opérateur L, est constitué des espaces de Sobolev anisotropes suivants

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) ; \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

et

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

muni de la norme usuelle

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

On utilisera souvent les indices

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}},\ p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Si $\overline{p} < N$, alors

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)\,\forall r \in [1, \overline{p}^*]$$

et cette injection continue, devient en plus compacte dès que $r < \overline{p}^*$.
Nous avons aussi, pour tout $v \in W_0^{1,(p_i)}$, pour tout $r > 1$ et pour tout $i = 1, ..., N$ l'inégalité de type Poincaré suivante

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C(|\Omega|)r\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^r(\Omega)}$$

1.1 Théorème. *Il existe une constante positive C, qui dépend uniquement de Ω, telle que pour chaque $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, on a*

$$\|v\|^{p_N}_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C\sum_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|^{p_i}_{L^{p_i}(\Omega)}, \tag{1.2}$$

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C\prod_{i=1}^{N}\|\partial_i v\|^{\frac{1}{N}}_{L^{p_i}(\Omega)} \qquad \forall r \in [1, \overline{p}^*] \tag{1.3}$$

et $\forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\overline{p} < N$

$$\left(\int_\Omega |v|^r\right)^{\frac{N}{\overline{p}}-1} \leq C\prod_{i=1}^{N}\left(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i}|v|^{t_i p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}, \tag{1.4}$$

pour chaque r et t_j choisis de telle sorte à avoir $\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\gamma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1} \\ \sum_{i=1}^{N}\gamma_i = 1. \end{cases}$

1.1 Définition. *On dira que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution au sens de l'énergie de (1.1) si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i\varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega),$$

et on dira que u est une solution faible de (1.1) si $\partial_i u^{p_i-1} \in L^1(\Omega)$, $\frac{f}{u^{\gamma(x)}} \in L^1_{loc}(\Omega)$, et on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega |\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i\varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

2 Principaux résultats

Les résultats présentés ici ont été publiés dans [7, 8].

2.1 Théorème. *Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N(\overline{p}-1)+\overline{p}}$ et $f \in L^s(\Omega)$, supposons qu'il existe un $\delta > 0$ tel que si $\gamma(x) \leq 1$ dans Ω_δ, alors le problème (1.1) possède une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.*

2.2 Théorème. *Supposons que pour un certain $\gamma^* > 1$ et pour un $\delta > 0$ on ait $\|\gamma\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} \leq \gamma^*$. Pourvue que $f \in L^s(\Omega)$ avec $s = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{N(\overline{p} - 1) + \overline{p}\gamma^*}$, le problème (1.1) possède une solution u dans $L^\alpha(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$, appartenant à $W^{1,(p_i)}_{loc}(\Omega)$.*

Idée de la peuve
On considère les problèmes approximants suivants

$$\begin{cases} -Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} & dans\ \Omega, \\ u_n = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u_n \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $f_n = T_n(f)$, où

$$T_n(s) = \begin{cases} n\frac{s}{|s|} & si \quad |s| > n \\ s & si \quad |s| \leq n \end{cases}$$

On a alors les lemmes suivants :

2.1 Lemme. *Le problème (2.1) possède une solution dans $W^{1,(p_i)}_0(\Omega)$.*

2.2 Lemme. *La suite $\{u_n\}_n$ est croissante par rapport à n.*

2.3 Lemme. *Pour tout $n \in I\!N$, u_n la solution du problème approximant (2.1), est telle que $u_n \in L^\infty(\Omega)$ et pour tout $K \subset\subset \Omega$, $u_n \geq C_K > 0$.*

Une fois ces lemmes démontrés, on passera à la limite en n pour montrer nos résultats principaux.

Références

[1] Carmona, José, and Pedro J. Martínez-Aparicio, *A singular semilinear elliptic equation with a variable exponent*, Advanced Nonlinear Studies 16.3 (2016) : 491-498.

[2] L. Boccardo and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 37 (2009), 363–380.

[3] L. M. De Cave, *Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Asymptotic Analysis 84 (2013), 181-195.

[4] A. Di Castro, *Elliptic problems for some anisotropic operators*, Ph.D. Thesis, University of Rome "Sapienza", a. y. 2008/2009

[5] A. Di Castro, *Existence and regularity results for anisotropic elliptic problems*, Adv. Nonlin.Stud. 9 (2009), 367–393.

[6] A. Di Castro, *Anisotropic elliptic problems with natural growth terms*, Manuscripta mathematica 135 (3-4) (2011), 521-543.

[7] Leggat, Ahmed Réda, and Miri, Sofiane El-Hadi, *Anisotropic problem with singular nonlinearity*, Complex Variables and Elliptic Equations 61.4 (2016) : 496-509.

[8] Miri, Sofiane El-Hadi, *On an anisotropic problem with singular nonlinearity having variable exponent*, Ricerche di Matematica 66.2 (2017) : 415-424.