Université de Tlemcen.
Département de Génie Electrique et Electronique.
$1^{ère}$ année Génie Industriel.

Année Universitaire : 2015/2016.
Outils Mathématiques.

Examen de Rattrapage

Exercice-1 : (06 points)

Calculer les primitives suivantes :

1. $I_1 = \int \frac{x-3}{2x^2+2x+5}dx$ 2. $I_2 = \int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$ 3. $I_3 = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice-2 : (08 points)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx.$$

1. Sans calculer I et J, montrer que $I = J$.
2. Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J.

Exercice-3 : (06 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = e^{3\lambda x} \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Correction

Exercice-1 : (06 points)

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-3}{2x^2+2x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{14}{4}}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+5| - \frac{7}{2}\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx + c$, et $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{9}{4}}dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{3})^2+1}dx$, on pose $t = \frac{2x+1}{3}$, $\displaystyle\int \frac{1}{3(t^2+1)}dt = \frac{1}{3}\arctan(\frac{2x+1}{3}) + c$, donc
   $I_1 = \dfrac{1}{4}\ln|x^2+x+3| - \dfrac{7}{6}\arctan(\dfrac{2x+1}{3}) + c$...(1.5 points)
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}dx = \int \frac{x^4-x+x}{x^3-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{x}{x^3-1}dx = x + I_2'$, et de plus $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$ alors
   $I_2' = \displaystyle\int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$ par la décomposition en élement simple, on obtient que :
   $\dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}$, on aura que $\alpha = \gamma = -\beta = \frac{1}{3}$, et par suite
   $$I_2' = \frac{1}{3}[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx] = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}[\ln(x^2+x+1) - \int \frac{3}{x^2+x+1}dx]$$
   $$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}[\ln(x^2+x+1) - \int \frac{3}{x^2+x+1}dx] = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{6}I"_2,$$
   avec
   $I"_2 = \displaystyle\int \frac{3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{4}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$, on pose $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ alors $I"_2 = \displaystyle\int \frac{2\sqrt{3}}{t^2+1}dt = 2\sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$.
   Donc
   $I_2 = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}\ln|x-1| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$..(3 points).
3. $I_3 \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$, on pose $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)dt$
   $$I_4 = \int \frac{\cos(t)dt}{(1-\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{dt}{\cos(x)^2}dx = \tan(t) + c = \tan(\arcsin(x)) + c$$
   $$= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c \text{..(1.5 points).}$$

Exercice-2 : (08 points)

Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx.$$

1. Commencons par calculer $I - J$
   $$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x)-\sin(x))(\cos(x)+\sin(x))}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x)-\sin(x))\,dx = 0 \text{....(2points)}$$
2. la deuxième relation
   $$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$$
   On utilise le changement de variable universel $t = \tan(\frac{x}{2})$, avec $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ et $dt = \dfrac{2}{1+t^2}$ on aura que
   $$I+J = \int_0^1 \frac{2}{-t^2+2t+1}dt = \int_0^1 \frac{2}{(t-t_0)(t-t_1)}dt = \int_0^1 \frac{\alpha}{(t-t_0)}dt + \int_0^1 \frac{\beta}{(t-t_1)}dt$$
   avec $t_0 = 1+\sqrt{2}$, $t_1 = 1-\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, donc
   $$I+J = \frac{1}{\sqrt{2}}[\ln|t-1-\sqrt{2}| - \ln|t-1+\sqrt{2}|]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\ln|1+\sqrt{2}| - \ln|\sqrt{2}-1|] = \sqrt{2}\ln|1+\sqrt{2}| \text{..................(4points)}$$

Alors on peut déduire que

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|1+\sqrt{2}| \text{...(1point)}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|1+\sqrt{2}| \text{...(1point)}$$

Exercice-3 : (06 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = e^{3\lambda x} \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Si $\lambda = 0$, alors l'équation réduit a

$$\begin{cases} y'' = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Et par suite $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, en utilisant les conditions initiales, on aura

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{.....................................(2points)}$$

2. Si $\lambda \neq 0$,

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = e^{3\lambda x}$$

— On commence par la résolution de l'equation sans second membre

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0$$

On lui associe l'équation caracteristique $r^2 - 4\lambda r + 4\lambda^2 = 0$, où cette équation possède une racines double $r = 2\lambda$ Et par suite la solution sera de la forme

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{2\lambda x} \text{.................................(1point)}$$

.

— Recherche d'une solution particulière de l'equation avec second membre, on peut remarquer que $y_*(x) = ce^{3\lambda x}$ est une solution particulière, ou c est une constante a fixée, on remplace la solution particulière dans l'équation on aura .

$$(9\lambda^2 - 12\lambda^2 + 4\lambda^2)ce^{3\lambda x} = e^{3\lambda x}.$$

Et par suite $c = \frac{1}{\lambda^2}$, donc la solution particulière $y_*(x) = \frac{1}{\lambda^2}e^{3\lambda x}$.....................(1point).
N.B : On peut utiliser la méthode de variation de la constante pour la recherche de solution particulière.
Alors la solution générale est

$$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}e^{3\lambda x}$$

Pour savoir les valeurs de a et b, on utilise les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$, on aura

$$y(0) = \beta + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \text{...................................(0.5point)}$$

$$y'(0) = \alpha + 2\lambda\beta + \frac{3}{\lambda} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda - 2\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{...................................(0.5point)}$$

La solution générale est :

$$y(x) = \left(\frac{(\lambda - 2\lambda^2 + 1)x}{\lambda} + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}\right)e^{2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}e^{3\lambda x} \text{.....................(1point).}$$