

Examen de rattrapage

**Exercice 1 : (04pts)**

1. Rappeler la définition d'une équation diophantienne.
2. Sous quelle condition l'équation diophantienne :

$$ax + by = 1$$

admet-elle des solutions ?

**Exercice 2 : (06pts)**

Soit l'application :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1.  $f$  ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Donner  $f(\mathbb{R})$ ; l'image directe de  $\mathbb{R}$  par l'application  $f$ .

**Exercice 3 : (06pts)**

On définit dans  $\mathbb{R}$  la relation  $\mathcal{R}$  par :  $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$

1. Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer à ; la classe d'équivalence du réel  $a$ .

**Exercice 4 : (04pts)**

Sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  on définit la loi  $*$  comme suit :

$$x * y = x + y + xy$$

1. Vérifier que  $*$  est une l.c.i (loi de composition interne).
2. Montrer que  $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$  est un groupe commutatif.