Université de Tlemcen.
Département de Génie Electrique et Electronique.
$1^{ère}$ Année Génie Industriel.

Année Universitaire : 2015/2016.
Analyse Mathématique.

Rattrapage

Exercice-1 : (6 pts)

Calculer les dérivées (et les simplifier si c'est possible) des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (1+\frac{1}{x})^x$
2. $f_2(x) = x^2 \ln(x+\sqrt{1+x^2})$
3. $f_3(x) = Arctan(\sqrt{1-x})$
4. $f_4(x) = \cos^3(\sqrt{1-x})$

Exercice-2 : (6 pts)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln[(ax+b)^\alpha].$$

Où a, b et α sont des nombres réels non nuls.

Exercice 3 : (8 pts)
Etant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les deux suites :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec} \quad U_0 = a \text{ et } V_0 = b.$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent une même limite.

Correction

Exercice 1 : (6 pts)
En utilisant la dérivée de la composition entre deux fonctions $(hog)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.

1. $f_1'(x) = [(1+\frac{1}{x})^x]' = [e^{(x\ln(1+\frac{1}{x}))}]' = [-\frac{1}{x} + \ln(1+\frac{1}{x})](1+\frac{1}{x})^x$ (1.5 pts)
2. $f_2(x) = [x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = 2x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ (1.5 pts)
3. $f_3(x) = [Arctan(\sqrt{1-x})]' = \dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$ (1.5 pts)
4. $f_4'(x) = [\cos^3(\sqrt{1-x})]' = \dfrac{3}{2\sqrt{1-x}}\sin(\sqrt{1-x})\cos^2(\sqrt{1-x})$ (1.5 pts)

Exercice-2 : (6 pts)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln[(ax+b)^\alpha].$$

Où a, b et α sont des nombres réels non nuls. f est dérivable sur $]-\frac{b}{a}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\alpha a}{ax+b}$$

$$f"(x) = \frac{-\alpha a^2}{(ax+b)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2\alpha a^3}{(ax+b)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2.3.\alpha a^3}{(ax+b)^4}$$

.

.

.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}} \quad , \ \forall n \in N.....(P_n) \qquad , (3pts)$$

Formule qu'il est necessaire de démontrer par récurrence : (3pts)

— Vérification : $n = 0$, $f'(x) = \dfrac{\alpha a}{ax+b}$ Vraie
— Hypothése de récurrence : (P_n).
— Résultat $f^{(n+2)}(x) = \dfrac{a^{n+1}(n+1)!(-1)^{n+1}\alpha}{(ax+b)^{n+2}}$, $\forall n \in N.....$ (P_{n+1}).
En effet

$$f^{(n+2)}(x) = [f^{(n+1)}(x)]' = [\frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}}]' = -(n+1)a\frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+2}} = \frac{a^{n+1}(n+1)!(-1)^{n+1}\alpha}{(ax+b)^{n+2}}$$

Et par suite,

$$\forall n \in N \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}} \quad , \ \forall n \in N$$

Exercice 3 : (8 pts)
Etant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les deux suites :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec} \quad U_0 = a \text{ et } V_0 = b.$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent une même limite.

1. Démonstration par réccurence que : pour tout entier n, $0 < U_n \leq V_n$ $\quad (P_n)$ (3 pts)
   - Vérification : $n = 0$, $0 < U_0 = a < b = V_0$
   - Hypothése de récurrence : (P_n).
   - Résultat $0 < U_{n+1} \leq V_{n+1}$ $\quad (P_{n+1})$.
     On a $0 < U_n \leq V_n$ alors $0 < \frac{U_n+V_n}{2} = V_{n+1}$ et $0 < U_{n+1}$,
     on remarque aussi que : $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} - \sqrt{U_n V_n} = \frac{(V_n-U_n)^2}{2} > 0 \; \forall n \in N$.
2. La monotonie de U_n et V_n (2 pts)
   - pour tout entier n, $U_n < V_n$, alors $U_n^2 < V_n U_n$ alors $U_n < \sqrt{V_n U_n} = U_{n+1}$, alors U_n est croissante $\forall n \in N$.
   - $0 < U_n \leq V_n$ alors $2V_n > U_n + V_n$, on peut déduire : $V_n > \frac{U_n+V_n}{2} = V_{n+1}$, On obtient V_n est décroissante $\forall n \in N$.
3. On a U_n est croissante et majorée par b alors elle converge, et U_n est décroissante et minorée par a alors elle converge. (2 pts)
4. Si on pose $\lim_{n\to\infty} U_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} V_n = \beta$
   $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}}$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$
   $\alpha = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$ donc les deux suites sont adjacentes (1 pt)