

**Examen de Rattrapage**

**Exercice 1** : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{1+y} - \alpha \\ \dot{y} = x - \beta \end{cases} \quad (S1) \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0$$

- 1- Trouver une condition sur les paramètres ; pour que le système (S1) possède un point d'équilibre dans le quadrant positif. Par la suite on supposera cette condition est toujours vérifiée.
- 2- Linéariser le système (S1) au voisinage du point d'équilibre, conclure !
- 3- Rechercher une intégrale première et l'utiliser pour préciser la qualité du point d'équilibre.
- 4- Tracer le portrait de phase

**Exercice 2** : Considérons l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (E)$$

Où  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues telles que :

- i- Il existe  $a > 0$  tel que  $f(x, y) > 0$  pour  $(x^2 + y^2) > a$ .
- ii-  $f(0, 0) < 0$ .
- iii-  $g(0) = 0$  et  $g(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ .
- iv-  $G(x) = \int_0^x g(s) ds \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$

Montrer que (E) possède une solution périodique.