Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | *Année 2012-2013*
Faculté de Technologie | *1ère Année*
Spécialité Productique | *Outils Mathématiques*

Examen de Rattrapage

<u>Exercice 1</u> : (06pts)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^6 - iZ^3 - 1 - i = 0$$

<u>Exercice 2 :</u> (08pts)

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$; calculer en fonction de m et de n l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$$

<u>Exercice 3</u> : (06pts)

Soit $\omega \in \mathbb{R}$; résoudre l'équation suivante :

$$y'' + \omega^2 y = x$$

Rattrapage

Outils Mathématiques

<u>EXERCICE 1</u>: Pour résoudre l'équation: $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$

on pose $z^3 = Z$; on obtient alors l'équation: $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

$$\Delta = (-i)^2 - 4(-1-i) = i^2 + 4 + 4i = (i+2)^2 \qquad \text{(1pt)}$$

ainsi $Z_1 = \dfrac{i+(i+2)}{2} = 1+i$, $Z_2 = \dfrac{i-(i+2)}{2} = -1$. (1pt)

sont solutions de l'équation $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$.

pour obtenir les solution de l'équation $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$ il suffit de prendre les racines cubiques de Z_1 et Z_2; ainsi $z = re^{i\theta}$

$$r^3 e^{i3\theta} = z^3 = 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 2^{1/6} \\ \arg(z) = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0,1,2. \end{cases}$$

$$z_1 = 2^{1/6} e^{i\pi/12}, \quad z_2 = 2^{1/6} e^{3i\pi/4}, \quad z_3 = 2^{1/6} e^{\frac{17i\pi}{12}} \quad \text{.... (02pts)}$$

$$z^3 = -1 = e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 1. \\ \arg(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$z_4 = e^{i\pi/3}, \quad z_5 = e^{i\pi} = -1, \quad z_6 = e^{\frac{5i\pi}{3}} \quad \text{.... (02pts).}$$

Notre équation de départ admet donc z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 comme solutions.

<u>EXERCICE 2</u>: $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*$

$$I = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \text{ — par parties } \begin{cases} f = x^m \longrightarrow f' = m x^{m-1} \\ g' = (1-x)^n \longrightarrow g = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$I = \left[-\frac{x^m (1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} dx = \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n+1} dx \quad \text{(1pt)}$$

Une deuxième intégration par parties $\begin{cases} f = x^{m-1} \longrightarrow f' = (m-1) x^{m-2} \\ g' = (1-x)^{n+1} \longrightarrow g = -\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \end{cases}$

On obtient alors : $I = \frac{m}{n+1}\left\{\left[-\frac{x^{m-1}(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 + \frac{m-1}{n+2}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n+2}dx\right\}$.

$$I = \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n+2}dx \quad \ldots\ldots \quad (01pt)$$

Après m intégrations par parties ; on obtient

$$I = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\times 2\times 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\int_0^1(1-x)^{n+m}dx = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\times 2\times 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\left[-\frac{(1-x)^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^1 \quad (02pts)$$

$$I = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\times 2\times 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(n+m+1)} \Rightarrow \boxed{I = \frac{m!\times n!}{(n+m+1)!}} \quad \ldots\ldots \quad (04pts)$$

Exercice 3 : $y'' + w^2 y = x \curvearrowright$ ESSM $y'' + w^2 y = 0 \curvearrowright$ Eq. Caractéristique $r^2 + w^2 = 0$.

On distingue deux cas.

1er cas : $w \neq 0$, $r^2 + w^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -w^2 = (iw)^2 \Rightarrow r_1 = iw$, $r_2 = -iw$

deux racines complexes conjuguées $y_0 = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$.

il est facile de remarquer que $y_* = \frac{1}{w^2}x$ est une solution particulière (sans utiliser la variation des constantes), ainsi

$$y = y_0 + y_* \Longrightarrow \boxed{y = C_1\cos wx + C_2 \sin wx + \frac{1}{w^2}x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (03pts)$$

2ème cas : $w = 0$, l'équation caractéristique donne $r^2 = 0$ (racine double)

et l'équation $y'' + w^2 y = x$ devient dans ce cas $y'' = x$

Pour trouver y ; il suffit d'intégrer deux fois

$$y'' = x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^2 + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x^3 + C_2 x + C_1.$$

Ainsi $\boxed{y = C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\quad$ (03 pts)