Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
1ère Année
Algèbre

Rattrapage

***Exercice 1** : (08 points)*

Soit l'application f définie comme suit :

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{f(n) = n + (-1)^n}$$

1. *f est-elle injective ?*
2. *f est-elle surjective ?*
3. *Calculer* $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{n})$.

***Exercice 2** : (07 points)*

Soient a, b *deux réels donnés.*

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a *et* b*, la matrice* A *est-elle inversible ?*

***Exercice 3** : (05 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *un entier naturel non nul donné, soient* $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$

$(n+1)$ *nombres réels dans* $[0, 1]$ *tels que*

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$$

Montrer par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \ \ tel\ que\ \ |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}$$

Corrigé de l'Examen de Rattrapage
Algèbre

Exercice 1 : $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longmapsto n + (-1)^n$.

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

1/ Injective : Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

1er cas : n_1, n_2 pairs. $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2$.

2ème cas : n_1, n_2 impairs $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$.

3ème cas : n_1 pair, n_2 impair $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_2 = n_1 + 2$ impossible
car n_1 pair $\Rightarrow (n_1+2)$ pair or n_2 impair.

4ème cas : n_1 impair, n_2 pair $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2 + 2$ impossible
car n_2 pair $\Rightarrow (n_2+2)$ pair or n_1 impair.

En conclusion $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ donc f est injective.

2/ Surjective Soit $y \in \mathbb{N}$

si y est pair alors il existe $n \in \mathbb{N}$ impair tel que : $y = n - 1 = f(n)$ $(n = y+1)$.
si y est impair alors il existe $n \in \mathbb{N}$ pair tel que $y = n + 1 = f(n)$ $(n = y-1)$

Donc $\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, y = f(n)$
En conclusion f est surjective.

3/ $(f \circ f)(n)$. On commence par observer que $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$, $f \circ f$ existe.

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) < \begin{array}{l} n \text{ pair} \Rightarrow f(n) = n+1 \Rightarrow f(n) \text{ impair} \\ n \text{ impair} \Rightarrow f(n) = n-1 \Rightarrow f(n) \text{ pair} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ pair} \Rightarrow f(f(n)) = f(n) - 1 = n+1-1 = n \\ n \text{ impair} \Rightarrow f(f(n)) = f(n) + 1 = n - 1 + 1 = n \end{array}\right) \text{ ainsi } (f \circ f)(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque : $f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$; donc f est bijective (ce qu'on savait déjà) et $f^{-1} = f$.

Exercice 2 :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (b^2 - b) - (ab^2 - a^2 b) + (a - a^2) = b(b-1) - ab(b-a) + a(1-a)$$
$$= b\left[(b-1) - a(b-a)\right] + a(1-a) = b\left[b - 1 - ab + a^2\right] + a(1-a)$$
$$= b\left[b(1-a) + (a^2-1)\right] + a(1-a) = (1-a)\left[b(b-(a+1)) + a\right]$$
$$= (1-a)\left[b^2 - b(a+1) + (a)\right] = (1-a)\left[b^2 - ba - b + a\right]$$
$$= (1-a)\left[b(b-1) - a(b-1)\right] = (1-a)(b-1)(b-a)$$

A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $a \neq b$.

EXERCICE 3 : $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$

Montrons par l'absurde que

$$\exists i \in \{1,2,3,\cdots,n\} \; ; \quad |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Supposons par l'absurde que:

$$\forall i \in \{1,2,3,\cdots,n\} \; ; \quad |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}. \qquad \text{———} \quad (02pts)$$

observons que $x_{i-1} \leq x_i \implies |x_i - x_{i-1}| = x_i - x_{i-1}$

$$x_1 - x_0 > \frac{1}{n}$$
$$x_2 - x_1 > \frac{1}{n}$$
$$x_3 - x_2 > \frac{1}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} > \frac{1}{n}$$
$$x_n - x_{n-1} > \frac{1}{n}$$

en additionnant toutes ces inégalités on obtient

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$x_n - x_0 > n \cdot \frac{1}{n} = 1$ donc $(x_n - x_0) > 1$ ce qui est impossible

Car : $0 \leq x_0 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. (03pts)