Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2012-2013
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Rattrapage

Exercice 1 : (10 pts)

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer P^{-1}.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, trouver une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, et

$$\begin{cases} u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{2}{5}v_{n-1} \\ v_n = \frac{1}{5}u_{n-1} + \frac{3}{5}v_{n-1} \end{cases}$$

Calculer alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Exercice 2 : (10 pts)

1. Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} 2x+2 & si\ x < 0 \\ -x+2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

   Montrer que g n'est ni injective ni surjective.
2. Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & si\ x < 0 \\ x+2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

   Montrer que f est injective et surjective, et donner l'expression de sa fonction réciproque$f^{-1}(x)$.
3. Donner l'expression de $(g \circ f)(x)$

Barème :

Exercice1 : 10 points = 1. 02pts ; 2. 03pts ; 3. 05pts.

Exercice2 : 10 points = 1. 03pts ; 2. 03pts ; 3. 04pts .

Algèbre – Rattrapage

Corrigé

Exercice 1:

1- $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det P = 2\times(-1) - 1\times 1 = -3 \neq 0$ donc P est inversible (01pt)

Cofacteurs $c_{11} = -1$, $c_{12} = -1$; $c_{21} = -1$, $c_{22} = 2$ donc $Com(P) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t Com(P) \Rightarrow P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$ (01pt)

2- $A = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$; $A = PDP^{-1} \Rightarrow D = P^{-1}AP$. ..... (01pt)

Ainsi $$D = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ ... (02pts)

3- $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$; $\begin{cases} u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{2}{5}v_{n-1} \\ v_n = \frac{1}{5}u_{n-1} + \frac{3}{5}v_{n-1} \end{cases}$ (S)

Le système (S) peut être mis sous forme matricielle $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 2/5 \\ \frac{1}{5} & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ (01pt)

et donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$; de même $\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}$ ...

on obtient alors $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . . . . . (01pt)

D'un autre côté : $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = A\times A \ldots \times A = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1}$
$= PD^nP^{-1}$.

donc $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2/3 + 1/3\left(\frac{2}{5}\right)^n & 2/3 - 2/3\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ 1/3 - 1/3\left(\frac{2}{5}\right)^n & 1/3 + 2/3\left(\frac{2}{5}\right)^n \end{pmatrix}$$ . . . (01pt)

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} \left[A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \right]$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ on obtient $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

en conclusion: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{3}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{3}$. (02pts)

Exercice 2:

1- $g(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Pour montrer que g n'st pas injective choisissons $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$.

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 2 = -x_2 + 2 \Rightarrow x_2 = -2x_1$.

Il suffit par exemple de considérer $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

$g(-1) = g(2) = 0$ mais $(-1) \neq 2$ donc g n'est pas injective. (01,5pt)

- Pour montrer que g n'est pas surjective observons que

$\begin{cases} \text{si } x<0 \Rightarrow g(x) = 2x+2 < 2 \\ \text{si } x \geq 0 \Rightarrow g(x) = -x+2 \leq 2 \end{cases}$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) \leq 2$.

Soit $y > 2$ par exemple $y = 3$; alors $y = g(x)$ n'admet pas de solution

en effet: $3 = g(x) = \begin{cases} 3 = 2x+2 & \text{si } x<0 \\ 3 = -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 & \text{si } x<0 \\ x = -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ absurde

donc g n'est pas surjective. (01,5pt)

2- $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2)$

1er cas: $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 2 = 2x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

2ème cas: $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow 2x_1 = x_2$ rejeté car $x_2 \geq 0$ et $x_1 < 0$

le $3^{ème}$ cas : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et le $4^{ème}$ cas : $x_2 < 0$ et $x_1 \geq 0$

se traitent de la même façon. (01pt)

ainsi la conclusion $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

- $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f(x) = 2x+2 < 2 \\ x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x+2 \geq 2 \end{cases}$

Soit $y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} y < 2 \ ; \ y = f(x) \Rightarrow y = 2x+2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{2} < 0 \\ y \geq 2 \ ; \ y = f(x) \Rightarrow y = x+2 \Rightarrow x = y-2 \geq 0. \end{cases}$

aisi $\begin{cases} \text{Si } y < 2 \ ; \ \exists x = \frac{y-2}{2} < 0 \text{ telque } y = f(x) \\ \text{Si } y \geq 2 \ ; \ \exists x = y-2 \geq 0 \text{ tel que } y = f(x). \end{cases}$ (01pt)

Donc $\forall y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$ donc f est surjective

En conclusion f est bijective ; et de ce qui précède on déduit que

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$ (01pt)

3. $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x)+2 & \text{si } f(x) < 0 \\ -f(x)+2 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(2x+2)+2 & \text{si } x < -1 \\ -(2x+2)+2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(x+2)+2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donc $$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x+6 & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$ (04pts)