HABILITATION

MIRI Sofiane El-Hadi

02 juin 2014

Cette présentation est une synthèse réunissant mes travaux scientifiques, mes travaux pédagogiques ainsi que mon parcours scolaire et universitaire

Parcours scolaire et universitaire

1992 Baccalauréat TM Mention Bien
1996 DES Mathématiques Option : Equations Différentielles Université de Tlemcen Mention Bien
2000 Magister Option : Analyse Fonctionnelle Université de Tlemcen Mention très honorable
2012 Doctorat Option Analyse Mathématique Mention très honorable

Expérience Professionnelle

1999-2001 Enseignant Vacataire Département d'Electronique Université de Tlemcen
2002-2003 Sous Lieutenant Département de Mathématiques et Informatique Ecole Militaire Polytechnique
2003-2006 Maître Assistant Département de Mathématiques Université de Tlemcen

Expérience Professionnelle

2006-2007 Chargé de Cours Département de Mathématiques Université de Tlemcen
2007-2012 Maître Assistant A Département de Mathématiques Université de Tlemcen
2013- Maître de Conférences B Département GEE (Génie Productique) Université de Tlemcen

Activités Pédagogiques

1999-2000 et 2000-2001

Responsable du module Info 6 Mathématiques générales pour 1ère année DEUA Informatique.

2003-2004

Responsable du Module Mathématiques pour 1ère année géologie.

Responsable du Module Mathématiques pour 1ère année agronomie.

Responsable du Module Statistiques pour 2ème année agronomie.

Activités Pédagogiques

2004-2005

Responsable du Module Mathématiques L1 Biologie (SNV).

Responsable du Module Statistiques pour 2ème année agronomie.

2005-2006

Responsable du Module Maths 5 Méthodes Numériques Appliquées pour L2 ST.

Responsable du Module Mathématiques L1 Biologie (SNV).

Responsable du Module Mathématiques pour 1ère année agronomie.

Responsable des Modules de Mathématiques l'UFC Centre de Tlemcen.

Activités Pédagogiques

2006-2007

Responsable du Module Maths 5 Méthodes Numériques Appliquées pour L2 ST.

Responsable du Module Mathématiques L1 Biologie (SNV).

Responsable des Modules de Mathématiques l'UFC Centre de Tlemcen.

2007-2008

Chargé de TD Math1 et Math2 L1 ST.

Responsable des Modules de Mathématiques l'UFC Centre de Tlemcen.

Activités Pédagogiques

2008-2009
Responsable des Modules Math1 et Math2 L1 ST.
Responsable des Modules de Mathématiques l'UFC Centre de Tlemcen.
2009-2010
Responsable des Modules Algèbre1 et Algèbre2 L1 MI.
Responsable des Modules de Mathématiques l'UFC Centre de Tlemcen.
2010-2011
Responsable des Modules Algèbre1 et Algèbre2 L1 MI.
Responsable des Modules Equations Fonctionnelles 1 et Equations Fonctionnelles 2 M1 Systèmes Dynamiques et Applications.
2011-2014 Responsable du Module Algèbre L1 Génie Productique.
Responsable du Module Outils Mathématiques L1 Génie Productique.

Activités Administratives

2002-2003 Adjoint du Chef du Département Mathématiques et Informatique Ecole Militaire Polytechnique.

Activités de Recherches

2011-2014 Membre du projet CNEPRU B02020100024 Etude asymptotique du développement de populations de cellules tumorales.
2011-2013 Membre du projet PNR 8/u13/1063 Contrôle du développement des cellules tumorales.
2011-2013 Membre du Laboratoire d'Automatique de Tlemcen Équipe 1 : Systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.
2013- Membre du Laboratoire d' Analyse Non Linéaire et Mathématiques Appliquées Équipe 1 : Analyse non linéaire et application à l'étude des problèmes elliptiques et paraboliques.

Publications Scientifiques

1. Miri, Sofiane El-Hadi. "Fractional power function spaces associated to regular Sturm–Liouville problems." Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) 2005 (2005) : Paper No. 49, 12 p.
2. Miri, Sofiane El-Hadi. "Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior." Adv.Nonlinear Stud. 12, No. 1, (2012), 19-48.
3. Miri, Sofiane El-Hadi. "Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term." Differ. Equ. Appl., 5 (2013), 111-125.

4. B. Abdellaoui, A. Attar, S.E.H. Miri. "Nonlinear singular elliptic problem with gradient term and general datum." Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 409, Issue 1, 1 January 2014, Pages 362-377.
5. Miri, Sofiane El-Hadi. "Existence of solutions to quasilinear elliptic problems with nonlinearity and absorption-reaction gradient term." Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2014 (2014), No. 32, pp. 1-12.
6. Boumediene Abdellaoui, Sofiane E. H. Miri, Ireneo Peral, Tarik M. Touaoula " Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term. " A paraître dans Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA .

Polycopié de cours Algèbre et Analyse pour étudiant de première année ; Faculté de Technologie Université de Tlemcen. 2013.

Magister

Durant la préparation de mon mémoire de Magister intitulé " Espaces de Sobolev associés à un Problème de Sturm-Liouville ", réalisé sous la direction de Monsieur le Professeur Dib. H ; je me suis intéressé aux problèmes

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}y(x)] \pm q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

$$a_0y(a) + a_1y'(a) = 0; b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \tag{2}$$

Ce travail a donné lieu à la publication internationale [3]

Doctorat

Ma thèse de doctorat intitulée "Problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singulier" réalisée sous la direction de Monsieur le Professeur Abdellaoui. B, fut consacrée à l'étude de certains problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singuliers.

Le premier problème auquel nous nous sommes interessé est une version nonlinéaire de l'équation de Lane-Emden-Fowler, plus précisément :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) = \pm |\nabla u|^{\nu} + \lambda f(x,u) & \text{dans}\Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

Doctorat

On démontrera que sous la condition $\int_0^1 q(t)\,g(t)\,dt = +\infty$, le problème étudié ne possède pas de solutions. Lorsque le terme en gradient est placé comme terme absorbant, on démontrera que si $\int_0^1 q(t)\,g(t)\,dt < +\infty$, alors sous certaines conditions sur q , g et f, si et pour $0 < \nu \leq p$, alors il existe un $\lambda^* > 0$ telque le problème possède au moins une solution entropique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour $\lambda > \lambda^*$ et ne possède pas de solution si $\lambda < \lambda^*$.
Lorsque le terme en gradient est placé comme terme de réaction, on obtiendra des résultats analogues, mais uniquement pour $0 < \nu \leq p - 1$.
Ce travail a donné lieu à la publication internationale [4]

Le second problème sur lequel nous nous sommes penchés, est l'existence et la nonexistence de solution de

$$(P_{\pm})\begin{cases} -\Delta_p u \pm u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On peut résumer les résultats obtenus, dans les deux points suivants :

1. Si u^q apparait comme terme de réaction, alors on montre l'existence d'un exposent critique $q_+(\lambda)$, tel que pour $q > q_+$, le problème considéré ne possède pas de solution distributionnelle positive. Si $q < q_+$ on démontre l'existence de solution, sous des conditions sur h.
2. Si u^q apparait comme terme absorbant, alors on démontre l'existence d'un q_* tel que si $q > q_*$, le problème considéré possède une solution positive pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$. L'optimalité de q_* est démontrée, dans le sens où, si $q < q_*$, il y a non existence de solution pour $\lambda > \Lambda_{N,p}$.

Ce travail a donné lieu à la publication internationale [5]

Le problème 3 auquel on s'est interessé est en réalité une classe de problèmes paraboliques

$$\begin{cases} (u^{\theta})_t - \Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f(x,t) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u \geq 0 \text{ et } u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où Ω est soit un domaine régulier borné contenant l'origine ou $\Omega = \boldsymbol{R}^N$, $1 < p < N$, $q > 0$ et θ est soit égal à 1 ou égal à $p-1$.

1. Dans le cas où $p > 2$ et $\lambda > 0$,et sous des conditions convenables sur u_0 et f, on démontre l'existence d'un exposent critique $q_+(\lambda)$ tel que si $q > q(\lambda)$, aucune solution - dans un sens convenable- n'existe. ce qui marque la différence avec le cas $\lambda = 0$.
2. Si $p < 2$, nous obetenons un résultat d'existence et même dans certains cas l'extinction en temps fini.

Ce travail donnera lieu à la prépublication (accéptée) en collaboration ave Messieurs les Professeurs Abdellaoui. B ; Peral. I et Touaoula. M.T. [6]

Après la thèse, et sur une proposition de Monsieur le Professeur Abdellaoui. B ; et en collaboration avec Monsieur le Dr. Attar. A, nous nous sommes intéressés au problème suivant, mettant en interaction l'opérateur linéaire laplacien, un terme en gradient et un terme singulier :

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \frac{f}{g(u)} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

Nous avons réussi à obtenir les résultats suivants

Pour $q = 2$

Théorème 1

Soit $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est une fonction continue croissante

$$\frac{e^s}{g(s)} \leq C \text{ quand } s \to \infty, \tag{6}$$

alors pour toute $f \in L^1(\Omega)$, telle que $f \gneqq 0$, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^2 + \dfrac{f}{g(u)} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

possède une solution distributionnelle u telle que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

La condition (6) imposée à g est optimale, en effet si pour un certain $a < 1$,

$$\limsup_{s\to\infty} \frac{g(s)}{e^{as}} < \infty, \tag{8}$$

alors il existe $f \in L^1(\Omega)$, telle que le problème 34 ne possède aucune solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Théorème 2

Supposons que la condition (8) *est vérifiée pour un certain $a < 1$, alors il existe $f \in L^1(\Omega)$telle que le problème* (34) *ne possède aucune solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Pour $1 < q < 2$

On commence d'abord par traiter le cas de données "régulières" $f \in L^\infty(\Omega)$.

Théorème 3

Supposons que $f \in L^\infty(\Omega)$, *alors pour tout* $\alpha, a > 0$, *le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f}{(u+a)^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

possède une solution positive u *telle que* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *et* $G_k^\sigma(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *et pour tout* $k > 0$, *où* $\sigma = \frac{(N-2)(q-1)}{2(2-q)}$.

En procédant par approximation, on arrive à obtenir le théorème suivant qui généralise le théorème précédent

Théorème 4

Supposons que $\alpha > \max\{\frac{q(N-1)-N}{2-q}, 0\}$, *alors pour toute* $f \in L^1(\Omega)$, *le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = |\nabla u|^q + \dfrac{f}{u^\alpha} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

possède une solution positive u *telle que* $G_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(u) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *et* $T_k(u) \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$.

Ce travail à fait l'objet de la publication [7]

Travaux réalisés après la thèse de doctorat

Un second travail après thèse a été publié, où l'on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \pm|\nabla u|^\nu + f(x,u), \quad \text{dans } \Omega, \\ u &\geq 0 \ \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ est un domaine borné régulier, $p > 1$ et $0 < \nu \leq p$. De plus, f est supposée être positive vérifiant certaines conditions à préciser.

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est supposée être :

Hypothèses

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est supposée être : Hölder continue croissante, et telle que

Hypothèses

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est supposée être : Hölder continue croissante, et telle que

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \text{ est décroissante pour tout } x \in \overline{\Omega}, \qquad (11)$$

Hypothèses

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est supposée être : Hölder continue croissante, et telle que

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \text{ est décroissante pour tout } x \in \overline{\Omega}, \tag{11}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0 \text{ uniformément pour } x \in \overline{\Omega}. \tag{12}$$

Hypothèses

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est supposée être : Hölder continue croissante, et telle que

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} \text{ est décroissante pour tout } x \in \overline{\Omega}, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et } \lim_{t\to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0 \text{ uniformément pour } x \in \overline{\Omega}. \tag{12}$$

$$f(x,0) \neq 0 \tag{13}$$

Si l'on considère des problèmes du type :

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

Si l'on considère des problèmes du type :

$$\begin{cases} -div(a(x, \nabla u)) + H(x, \nabla u) = f(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

en gardant toujours à l'esprit le cas particulier qui nous intéresse :

Si l'on considère des problèmes du type :

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = f(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

en gardant toujours à l'esprit le cas particulier qui nous intéresse :

$$\begin{cases} -\triangle_p u \pm |\nabla u|^q = f(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $q \leq p$, on a le résultat de comparaison suivant ([8]) :

si $q > \frac{N(p-1)}{N-1}$, $1 < p \leq 2$

$$f = f_1(x) + div(f_2(x)) \quad \text{où} \quad f_1 \in L^1(\Omega) \text{ et } f_2 \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N \tag{15}$$

$$[a(x,\xi) - a(x,\eta)](\xi - \eta) \geq \alpha \left(|\xi|^2 - |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \eta|^2 \ , \quad \alpha > 0 \tag{16}$$

$$a(x,0) = 0 \tag{17}$$

$$|a(x,\xi)| \leq \beta \left(k(x) + |\xi|^{p-1}\right) \ , \quad \beta > 0, \quad k(x) \in L^{p'}(\Omega) \tag{18}$$

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \quad \leq \quad \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi - \eta| \, , \tag{19}$$

$$\gamma > 0, \ b(x) \in L^r(\Omega), \tag{20}$$

$$\text{où } 1 \quad \leq \quad q \leq p - 1 + \frac{p}{N} \text{ et } r \geq \frac{N(q-(p-1))}{q-1} \tag{21}$$

$$(\text{with} \quad r = \infty \text{ si } q = 1)\,. \tag{22}$$

Si u et v sont respectivement sous- et sur-solution de (14), telles que

$$(1+|u|)^{\overline{q}-1} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ and } (1+|v|)^{\overline{q}-1} v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{23}$$

$$\overline{q} = \frac{(N-p)(q-(p-1))}{p(p-q)} \tag{24}$$

alors $u \leq v$ dans Ω.

Sous les hypothèses, $q < \frac{N(p-1)}{N-1}$, $2 - \frac{1}{N} < p \leq 2$ et (15, 16, 17, 18), et

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \leq \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1} \right) |\xi - \eta|, \tag{25}$$

$$\gamma > 0, \ b(x) \in L^r(\Omega),$$

$$r > \frac{N(p-1)}{N(p-1)-(N-1)} \text{ and } 1 \leq q < \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

Si u et v sont respectivement sous- et sur-solution de (14), alors $u \leq v$ dans Ω.

Sur un lemme de comparaison

Sous les hypothèses , $p > 2$, $q > \frac{p}{2} + \frac{(p-1)}{N-1}$, (17), (18) et

$$[a(x,\xi) - a(x,\eta)](\xi - \eta) \geq \alpha \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \eta|^2 \ , \ \alpha > 0$$

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \leq \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi - \eta| \, , \ \gamma > 0, \tag{26}$$

$$b(x) \in L^N(\Omega) \text{ où } 1 \leq q \leq \frac{p}{2} + \frac{p}{N} \, . \tag{27}$$

Si u and v sont respectivement sous- et sur-solution de (14), telles que

$$(1+|u|)^{\overline{q}-1} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } (1+|v|)^{\overline{q}-1} v \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \overline{q} = \frac{(N-p)\left(q - \frac{p}{2}\right)}{p\left(\frac{p}{2} + 1 - q\right)} \tag{28}$$

alors $u \leq v$ in Ω.

Nous nous intéressons tout d'abord au problème suivant

Le terme en gradient comme terme absorbant

Nous nous intéressons tout d'abord au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |\nabla u|^{\nu} = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{29}$$

Nous avons alors le résultat d'existence suivant :

Nous avons alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 5

Si les conditions sur f sont vérifiées. Si $0 < \nu \leq p$, alors le problème (29) possède au moins une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Etape 1 : Construction de sous- et sur-solution considérons le problème auxiliaire :

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f(x, w) & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Idée de la démonstration

Etape 1 : Construction de sous- et sur-solution considérons le problème auxiliaire :

$$\begin{cases} -\Delta_p w = f(x, w) & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

alors w nous fournit une sur-solution de (29) pendant que $\underline{u} = 0$ est une sous solution, avec $\underline{u} \leq w$

Idée de la démonstration

Etape 2 : Existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ **et** $1 \leq \nu \leq p - 1 + \frac{p}{N}$.
On définit la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ comme suit : $u_0 = \underline{u}$ et pour $n \geq 1$, u_n est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + |\nabla u_n|^{\nu} = f(x, u_{n-1}) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{31}$$

Etape 3 : Existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ et $p - 1 + \frac{p}{N} \leq \nu \leq p$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ comme suit :
$v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{n,k}$ comme étant solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{k,n} + \dfrac{\left|\nabla v_{k,n}\right|^{\nu}}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla v_{k,n}\right|^{\nu}} = f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{32}$$

Idée de la démonstration

Etape 4 : Existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ **et** $0 < \nu \leq 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ comme suit :
$v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{n,k}$ comme étant la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{k,n} + (|\nabla v_{k,n}| + \frac{1}{n})^\nu = f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{33}$$

Etape 5 : Existence pour $2 < p$ et $\nu \leq p$.
Pour le cas dégénéré $p > 2$, nous allons perturber la partie principale de l'opérateur, pour $\varepsilon > 0$, on considère les problèmes :

Etape 5 : Existence pour $2 < p$ **et** $\nu \leq p$**.**
Pour le cas dégénéré $p > 2$, nous allons perturber la partie principale de l'opérateur, pour $\varepsilon > 0$, on considère les problèmes :

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u + |\nabla u|^\nu = f\,(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

Etape 5 : Existence pour $2 < p$ et $\nu \leq p$.
Pour le cas dégénéré $p > 2$, nous allons perturber la partie principale de l'opérateur, pour $\varepsilon > 0$, on considère les problèmes :

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u + |\nabla u|^\nu = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

où

$$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u).$$

Pour ε fixé on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in \boldsymbol{N}}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{n,k}$comme étant la solution du problème

$$\begin{cases} -L_\varepsilon v_{k,n} + D_n(\nabla v_{k,n}) = f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{35}$$

Idée de la démonstration

Pour ε fixé on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{n,k}$comme étant la solution du problème

$$\left\{\begin{array}{cl} -L_\varepsilon v_{k,n} + D_n(\nabla v_{k,n}) = f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{35}$$

où

$$D_n(\xi) = \begin{cases} \frac{|\xi|^\nu}{1+\frac{1}{n}|\xi|^\nu} & \text{si} \quad 1 < \nu \leq p \\ \\ (|\xi| + \frac{1}{n})^\nu & \text{si} \quad \nu \leq 1. \end{cases}$$

Le terme en gradient comme terme de réaction

Nous nous intéressons à présent au problème suivant :

Le terme en gradient comme terme de réaction

Nous nous intéressons à présent au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + |\nabla u|^{\nu} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{36}$$

avec $\nu < p - 1$.

Nous avons alors le résultat d'existence suivant :

Nous avons alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 6

Sous les hypothèses émises sur f, le problème (36) possède au moins une solution distributionnelle.

Idée de la démonstration

$\underline{u} = 0$ est toujours une sous solution de notre problème, mais pour obtenir une sur-solution, nous introduisons le problème auxiliaire suivant :

Idée de la démonstration

$\underline{u} = 0$ est toujours une sous solution de notre problème, mais pour obtenir une sur-solution, nous introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x, u) + 1 & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{37}$$

Idée de la démonstration

$\underline{u} = 0$ est toujours une sous solution de notre problème, mais pour obtenir une sur-solution, nous introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + 1 & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{37}$$

alors $\overline{u} = Cv$ (avec C assez "grand") est une sur-solution du problème (36), avec $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Nous envisageons de généraliser certains des résultats obtenus et cités plus haut, dans le cadre des opérateurs anisotropes, et des opérateurs fractionnaires, et plus particulièrement en utlisant l'inégalité de Hardy-Sobolev fractionnaire récemment établie par les professeurs Abdellaoui et Peral.
Parmi nos travaux en perspectives, nous essayons de prospecter dans le cadre des problèmes quasilinéaires elliptiques avec terme singulier l'impact de la conditions de Keller-Osserman, en effet les problèmes avec terme singulier sont fortement liés aux problèmes avec solutions explosives sur le bord.

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{dans} \;\; \Omega \\ u > 0 & \text{dans} \;\; \Omega \\ u = +\infty & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{38}$$

où f est une fonction positive définie sur $[0, +\infty)$, de classe C^1 , avec $f'(s) \geq 0$, $f(0) = 0$. La condition $u = +\infty$ sur $\partial\Omega$, est à comprendre dans le sens $\lim\limits_{d(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty$. Les solutions de (38) sont dites solutions larges, explosives ou "Blow up solutions". Nous avons alors le théorème suivant dû à Keller et Osserman.

Théorème 7

Le problème (38), admet une solution si et seulement si

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{F(t)}} dt < \infty \text{ où } F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

Lorsque $f(u) = u^p$, avec $p > 1$ le changement $v = \frac{1}{u}$, transforme le problème (38) en

$$\begin{cases} -\Delta v = v^{2-p} - 2v^{-1}\left|\nabla v\right|^2 & \text{dans } \Omega \\ v > 0 & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on se retrouve devant un problème elliptique, avec terme en gradient et terme singulier. Il y aurait donc une relation implicite entre les problèmes à solution explosives (38), les conditions de Keller Osserman, et les problèmes elliptiques avec terme du premier ordre et singularité. Le but de nos recherches futures est de faire -dans le cadre le plus général possible- le lien entre les problèmes quasilinéaires avec terme singulier ; les solutions explosives de problèmes elliptiques et les conditions de Keller-Osserman

Il existe aussi un autre front sur lequel on aimerait aller, c'est de généraliser certains des résultats obtenus en remplaçant le p-laplacien classique par sa version anisotrope

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

B. Abdellaoui, *Multiplicity result for quasilinear elliptic problems with general growth in the gradient*, Advanced Nonlinear Studies **8** (2008), 289-302.

B. Abdellaoui, I. Peral, *Existence and non existence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian with a critical potential. Annali di Matematica*, **182** (2003), 247-270.

Miri, Sofiane El-Hadi. *Fractional power function spaces associated to regular Sturm-Liouville problems.* Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) 2005 (2005) : Paper No. 49, 12 p.

Miri, Sofiane El-Hadi. *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior.* Adv.Nonlinear Stud. **12**, No. 1, (2012), 19-48.

Miri, Sofiane El-Hadi. *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term.* Differ. Equ. Appl., **5** (2013), 111-125.

Boumediene Abdellaoui, Sofiane E. H. Miri, Ireneo Peral, Tarik M. Touaoula . *Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term.* A paraître dans Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA .

B. Abdellaoui, A. Attar, S.E. Miri. *Nonlinear singular elliptic problem with gradient term and general datum.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume **409**, Issue 1, 1 January 2014, Pages 362-377.

A. Porretta, *On the comparison principle for p-Laplace type operators with first order terms*, Resultsand developments , Quaderni di Matematica **23**, Department of Mathematics, Seconda Universit‘a diNapoli, Caserta, 2008.

Fin

MERCI POUR VOTRE ATTENTION