Problèmes elliptiques et paraboliques avec terme singulier

MIRI Sofiane El-Hadi

21 octobre 2012

Introduction

Le présent travail à pour but d'étudier des problèmes elliptiques et paraboliques, faisant intevenir un opérateur quasilinéaire et un terme singulier. L'opérateur quasilinéaire en question n'est autre que le p-laplacien classique :

$$\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}.\nabla u).$$

Le terme singulier quant à lui sera selon les cas une fonction nonlinéaire modélisée par

$$g(u) = \frac{1}{u^\alpha}$$

ou encore une singularité de type Hardy :

$$\frac{u^{p-1}}{|x|^p}$$

Introduction

On s'interesse en particulier à des problèmes du type

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) = H(x,u,\nabla u) + f(x) \quad dans\ \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

On s'interesse en particulier à des problèmes du type

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) = H(x,u,\nabla u) + f(x) \quad dans\ \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

et sa version parabolique,

$$\begin{cases} v_t^\theta - div(a(x,\nabla v)) = K(t,x,u,\nabla u) + g(x,t) \quad dans\ \Omega \\ v(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ v(x,0) = v_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où a est un opérateur elliptique non linéaire, H, K sont des fonctions vérifiant des hypothèses à préciser ultérieurement.

Les problèmes traités dans cette thèse, trouvent leurs origines dans différents domaines nous citerons à titre d'exemple : la catalyse hétérogène chimique, la catalyse cinétique chimique, l'induction de chaleur ou encore l'induction électrique, la théorie des fluides non newtonien, problèmes de réaction diffusion et la théorie des fluides visqueux.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies. 12 (2012), 19-48.

Introduction

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies. 12 (2012), 19-48.
- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term*, à paraître dans le numéro de Novembre de Differential Equations and applications.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies. 12 (2012), 19-48.
- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term*, à paraître dans le numéro de Novembre de Differential Equations and applications.
- B. Abdellaoui, S.E. Miri, I.Peral, M.T.Touaoula *Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term.* Soumis.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet des publications suivantes :

- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior*, Advanced Nonlinear Studies. 12 (2012), 19-48.
- S.E.H. Miri, *Quasilinear elliptic problem with Hardy potential and a reaction-absorbtion term*, à paraître dans le numéro de Novembre de Differential Equations and applications.
- B. Abdellaoui, S.E. Miri, I.Peral, M.T.Touaoula *Some remarks on quasilinear parabolic problems with singular potential and a reaction term.* Soumis.
- B. Abdellaoui, S.E. Miri, M.T.Touaoula *Quasilinear elliptic problem with gradient term and singular nonlinearity.* Soumis.

Considérons la classe de problème elliptiques suivants :

$$\begin{cases} -div(a(x,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

en gardant en tête que le modèle auquel on aspire n'est autre que

$$\begin{cases} -\triangle_p u + |\nabla u|^q = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $q \leq p$.

Introduction (principe de comparaison)

Sous les hypothèses, $q > \frac{N(p-1)}{N-1}$, $1 < p \leq 2$ et

$$f = f_1(x) + div(f_2(x)) \quad \text{où} \quad f_1 \in L^1(\Omega) \text{ et } f_2 \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N \tag{4}$$

$$[a(x,\xi) - a(x,\eta)](\xi - \eta) \geq \alpha \left(|\xi|^2 - |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \eta|^2 \;, \quad \alpha > 0 \tag{5}$$

$$a(x,0) = 0 \tag{6}$$

$$|a(x,\xi)| \leq \beta \left(k(x) + |\xi|^{p-1}\right) \;, \quad \beta > 0, \quad k(x) \in L^{p'}(\Omega) \tag{7}$$

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \quad \leq \quad \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi - \eta| \,, \tag{8}$$

$$\gamma > 0, \; b(x) \in L^r(\Omega), \tag{9}$$

$$\text{où } 1 \quad \leq \quad q \leq p - 1 + \frac{p}{N} \text{ et } r \geq \frac{N(q-(p-1))}{q-1} \quad (\text{ou} \quad r = \infty \text{ si } q = 1)\,. \tag{10}$$

Théorème 1

Si u et v sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (3), vérifiant le critère de régularité suivant

$$(1+|u|)^{\overline{q}-1}\,u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } (1+|v|)^{\overline{q}-1}\,v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \ \overline{q} = \frac{(N-p)\,(q-(p-1))}{p\,(p-q)} \tag{11}$$

alors $u \leq v$ *dans* Ω.

Théorème 2

Sous les hypothèses, $q < \frac{N(p-1)}{N-1}$, $2 - \frac{1}{N} < p \leq 2$ *et (4, 5, 6, 7), de plus*

$$|H(x,\xi) - H(x,\eta)| \leq \gamma\left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right)|\xi - \eta| \quad (12)$$

$$\gamma > 0, \; b(x) \in L^r(\Omega),$$

$$r > \frac{N(p-1)}{N(p-1)-(N-1)} \text{ et } 1 \leq q < \frac{N(p-1)}{(N-1)}.$$

Si u *et* v *sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (3), alors* $u \leq v$ *dans* Ω.

Théorème 3

Sous les hypothèses, $p > 2$, *(6), (7) et*

$$[a(x,\xi) - a(x,\eta)](\xi - \eta) \geq \alpha \left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \eta|^2 \ , \ \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} |H(x,\xi) - H(x,\eta)| &\leq \gamma \left(b(x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right) |\xi - \eta| \ , \ \gamma > 0, \\ b(x) &\in L^N(\Omega) \text{ où } 1 \leq q \leq \frac{p}{2} + \frac{p}{N} \ . \end{aligned}$$

Si u et v sont respectivement une sous et une sur-solution (renormalisée) de (3), vérifiant le critère de régularité suivant

$$(1 + |u|)^{\overline{q}-1} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et } (1 + |v|)^{\overline{q}-1} v \in W_0^{1,p}(\Omega), \ \overline{q} = \frac{(N-p)\left(q - \frac{p}{2}\right)}{p\left(\frac{p}{2} + 1 - q\right)}$$

alors $u \leq v$ *dans* Ω.

A. Porretta, *On the comparison principle for p-Laplace type operators with first order terms*, Resultsand developments , Quaderni di Matematica **23**, Department of Mathematics, Seconda Universit'a di Napoli, Caserta, 2008.

Une version nonlinéaire de l'équation de Lane-Emden-Fowler

On convient de placer sous le vocable "Equation de Lane-Emden-Fowler nonlinéaire" tout problème du type

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) = \pm |\nabla u|^{\nu} + \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

- La fonction g est supposée positive strictement décroissante et telle que $g \in C^1(0, +\infty)$ avec $\lim_{t \to 0} g(t) = +\infty$

- La fonction g est supposée positive strictement décroissante et telle que $g \in C^1(0, +\infty)$ avec $\lim_{t \to 0} g(t) = +\infty$
- On supposera aussi que $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ est une fonction Höldérienne (Hölder continue) croissante vérifiant la fonction $t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ est décroissante pour tout $x \in \overline{\Omega}$

- La fonction g est supposée positive strictement décroissante et telle que $g \in C^1(0, +\infty)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = +\infty$

- On supposera aussi que $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ est une fonction Höldérienne (Hölder continue) croissante vérifiant
la fonction $t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ est décroissante pour tout $x \in \overline{\Omega}$

- $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0 \tag{14}$$

 uniformément pour tout $x \in \overline{\Omega}$

- La fonction g est supposée positive strictement décroissante et telle que $g \in C^1(0, +\infty)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = +\infty$
- On supposera aussi que $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty)$ est une fonction Höldérienne (Hölder continue) croissante vérifiant la fonction $t \mapsto \frac{f(x,t)}{t^{p-1}}$ est décroissante pour tout $x \in \overline{\Omega}$
- $$\lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t^{p-1}} = 0 \tag{14}$$

  uniformément pour tout $x \in \overline{\Omega}$
- La foncion $q : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ quant à elle est supposée Höldérienne (Hölder continue) décroissante.

On commence par étudier le cas où le terme en gradient est placé comme terme absorbant, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^{\nu} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

On commence par étudier le cas où le terme en gradient est placé comme terme absorbant, c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^{\nu} = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

Théorème 4

Si $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt = +\infty$*, alors le problème (15) ne possède pas de solution dans l'espace d'energie* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration.

L'idée de la démonstration consiste à procéder par l'absurde, puis par un principe de comparaison utiliser le fait que la solution est comparable à la fonction $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$

$$\int_\Omega g(C_1 d(x))\, q(d(x))\, dx \leq \int_\Omega g(v)\, q(d(x))\, dx \leq M$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt = +\infty$$

$\square$

Supposons à présent que

$$\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty, \tag{16}$$

alors nous avons le résultat d'existence

Supposons à présent que

$$\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty, \tag{16}$$

alors nous avons le résultat d'existence

Théorème 5

Supposons que la condition (16) *est vérifiée est que les conditions sur* q , g *et* f *sont satifaites. Si de plus* $0 < \nu \leq p$, *alors il existe un* $\lambda^* > 0$ *tel que le problème (15) possède au moins une solution entropique* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour* $\lambda > \lambda^*$ *et ne possède pas de solution si* $\lambda < \lambda^*$.

La démonstration est structurée en plusieurs étapes.
Etape 1 : Construction de sous et sur-solution
Pour montrer l'existence de solution nous allons utiliser un argument de sous et sur-solution ; pour cela considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x, w) & \text{dans } \Omega, \\ w > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17}$$

Soit $\underline{u} = Mh(c\varphi_1)$ où M et c sont des contantes positives choisies ultérieurement, et où φ_1 désigne la première fonction propre p-laplacian

h est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} h''(t) = q(h(t))\, g(h(t)), \\ h' > 0, \\ h > 0, \\ h(0) = h'(0) = 0, \end{cases}$$

notons que l'existence de h est assurée par la condition $\int\limits_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$.

Maintenant que nous avons les sous et sur-solution, il reste à comparer.

Maintenant que nous avons les sous et sur-solution, il reste à comparer.

Etape 2 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $1 \leq \nu \leq p - 1 + \frac{p}{N}$

Le but de la manoeuvre est d'adapter à notre opérateur les Théorèmes de comparaison de Porretta.

Introduisons la suite de fonctions $\{u_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ comme suit : $u_0 = \underline{u}$ et pour $n \geq 1$, u_n est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n + g\left(u_{n-1}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \left|\nabla u_n\right|^{\nu} = \lambda f\left(x, u_{n-1}\right) & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

Etape 3 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $p - 1 + \frac{p}{N} \leq \nu \leq p$

Afin de construire une suite monotone et d'être toujours couvert par les théorèmes de comparaison cités plus haut ; nous allons adopter une nouvelle forme de problèmes approximants.

Comme $\frac{2N}{N+1} \leq p$, donc $p - 1 + \frac{p}{N} \geq 1$ on a alors que $\nu \geq 1$.

pour chaque $n \in \boldsymbol{N}^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k \in \boldsymbol{N}}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour tout $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_{k,n} + g\left(v_{k-1,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + \dfrac{\left|\nabla v_{k,n}\right|^{\nu}}{1 + \frac{1}{n}\left|\nabla v_{k,n}\right|^{\nu}} = \lambda f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{da} \\ v_{k,n} > 0 & \text{da} \\ v_{k,n} = 0 & \text{su} \end{cases} \tag{19}$$

Etape 4 : Résultat d'existence pour $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ ***et*** $0 < \nu \leq 1$
Toujours pour être dans les bonnes conditions d'application du principe de comparaison introduit plus haut ; nous introduisant une nouvelle forme d'approximation en effet posons

$$Q_n(\xi) = (|\xi| + \frac{1}{n})^{\nu} \text{ where } \xi \in \boldsymbol{R}^N,$$

et pour chaque $n \in \boldsymbol{N}^*$ fixé, on définit la suite $\{v_{n,k}\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ comme suit : $v_{n,0} = \underline{u}$ et pour $k \geq 1$, $v_{k,n}$ est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta_p v_{k,n} + g\left(v_{k-1,n}\right) q\left(d\left(x\right)\right) + Q_n(\nabla v_{k,n}) = \lambda f\left(x, v_{k-1,n}\right) & \text{dans } \Omega \\ v_{k,n} > 0 & \text{dans } \Omega \\ v_{k,n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{20}$$

Etape 5 : Resultat d'existence pour $2 < p$ ***et*** $\nu \leq p$
L'absence de principe de comparaison pour notre opétrateur dans le cas $p > 2$, nous impose d'introduire une perturbation non pas dans le terme en gradient mais dans le p-laplacien lui même ; nous introduisons alors pour $\varepsilon > 0$ les problèmes perturbés suivants

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u + g(u)\, q(d(x)) + |\nabla u|^\nu = \lambda f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{21}$$

avec

$$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u).$$

Etape 6 : Résultat de non existence pour $\lambda \leq \lambda^*$

Supposons par l'absurde que le problème (15) possède une solution non triviale $\tilde{u}$. on montre que

$$-\Delta_p \tilde{u} \leq \frac{\lambda_1}{2} \tilde{u} \, |\tilde{u}|^{p-2} .$$

ainsi $\tilde{u}$ procure une sous solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda_1}{2} u^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{22}$$

ce qui implique que $\tilde{u} \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\tilde{u}$ est une solution non triviale.

Etape 6 : Résultat de non existence pour $\lambda \leq \lambda^*$

Supposons par l'absurde que le problème (15) possède une solution non triviale $\tilde{u}$. on montre que

$$-\Delta_p \tilde{u} \leq \frac{\lambda_1}{2} \tilde{u} \, |\tilde{u}|^{p-2}.$$

ainsi $\tilde{u}$ procure une sous solution positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{\lambda_1}{2} u^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{22}$$

ce qui implique que $\tilde{u} \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $\tilde{u}$ est une solution non triviale. On démontre aussi que

$$A \equiv \{\lambda > 0; \ \text{tel que (15) possède une solution}\}$$

est un intervalle. Ce qui revient à montrer la dépendance continue par rapport à λ.

Nous avons le théorème d'existence suivant pour des données non nécessairement holderiennes :

Nous avons le théorème d'existence suivant pour des données non nécessairement holderiennes :

Théorème 6

Soient g, q satisfaisant aux mêmes conditions que dans la section précédente, et telles que $\int_0^1 q(t)g(t)dt < +\infty$. *soit* $0 < \alpha < p-1$, *alors il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda > \lambda^*$ *et pour tout* $h \in L^1(\Omega)$, *le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\,q(d(x)) + |\nabla u|^\nu = \lambda\,(u^\alpha + h(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{23}$$

possède une solution au sens d'entropie u.

Le terme en gradient comme terme de réaction

Nous allons nous interesser au problèmes où le terme en gradient est placé comme terme de réaction c'est à dire :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + g(u)\, q(d(x)) = \lambda f(x,u) + |\nabla u|^{\nu} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{24}$$

avec cette fois $\nu < p - 1$.

Le terme en gradient comme terme de réaction

Théorème 7

Supposons que $\int_0^1 q(t)\, g(t)\, dt < +\infty$ *et que* q , g *et* f *vérifient les mêmes hypothèses que dans la première section, alors pour* $0 < \nu < p - 1$ *il va exister un* $\lambda^* > 0$ *tel que le problème (24) possède au moins une solution entropique pour* $\lambda > \lambda^*$ *et ne posède pas de solution pour* $\lambda < \lambda^*$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

On s'interesse au problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q\alpha} \left|\nabla u\right|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{25}$$

avec dans un premier temps $f \in L^\infty(\Omega)$.

On s'interesse au problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{q\alpha} |\nabla u|^q + \lambda f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{25}$$

avec dans un premier temps $f \in L^\infty(\Omega)$.

Théorème 8

Supposons que $\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ *et* $1 \leq q \leq p$, *alors le problème* (25) *possède une solution positive.*

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Lemme 9

Soit g une fonction positive telle que $g \in L^{\rho}(\Omega)$ avec $\rho > \frac{N}{p}$ et $a > 0$. Supposons que w_1, w_2 sont deux fonctions positives $\in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ verifiant

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 \leq \dfrac{1}{(w_1+c)^a} \dfrac{|\nabla w_1|^q}{1+s|\nabla w_1|^q} + g & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{26}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p w_2 \geq \dfrac{1}{(w_2+c)^a} \dfrac{|\nabla w_2|^q}{1+s|\nabla w_2|^q} + g & \text{dans } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{27}$$

où $c, s > 0$, alors $w_2 \geq w_1$ dans Ω.

L'idée de la démonstration du théorème consiste à :

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration du théorème consiste à :

1. Construire une sursolution "radiale" dans $L^\infty(\Omega)$.

L'idée de la démonstration du théorème consiste à :

1. Construire une sursolution "radiale" dans $L^\infty(\Omega)$.
2. Approximer notre problème par la suite de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{28}$$

où

$$H_n(\xi) = \frac{|s|^q}{1 + \frac{1}{n}|s|^q}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

L'idée de la démonstration du théorème consiste à :

1. Construire une sursolution "radiale" dans $L^\infty(\Omega)$.
2. Approximer notre problème par la suite de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{28}$$

où

$$H_n(\xi) = \frac{|s|^q}{1 + \frac{1}{n}|s|^q}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

3. Utiliser le lemme précédent pour obtenir la monotonie de la suite $\{u_n\}_n$ qui sera bornée par la sursolution.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration du théorème consiste à :

1. Construire une sursolution "radiale" dans $L^\infty(\Omega)$.
2. Approximer notre problème par la suite de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{H_n(\nabla u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^a} + \lambda f & \text{in } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{28}$$

   où

$$H_n(\xi) = \frac{|s|^q}{1 + \frac{1}{n}|s|^q}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

3. Utiliser le lemme précédent pour obtenir la monotonie de la suite $\{u_n\}_n$ qui sera bornée par la sursolution.
4. Passer à la limite en n.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Dans le cas $q \leq 1$, nous avons le résultat d'existence suivant :

Dans le cas $q \leq 1$, nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 10

$\frac{2N}{N+1} \leq p < 2$ et $0 < q \leq 1$, le problème (25) possède une solution positive.

On applique la même technique que pour le cas précédent, sauf que l'approximation du la dépendance en gradient est substituée par : $H_n(\xi) = (|s| + \frac{1}{n})^{\nu}$ où $s \in \mathbb{R}^N$,

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Pour le cas dégénéré $p > 2$, pour $\varepsilon > 0$, et pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u)$. Alors nous avons le lemme suivant :

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Pour le cas dégénéré $p > 2$, pour $\varepsilon > 0$, et pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u)$. Alors nous avons le lemme suivant :

Lemme 11

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u = u^{\alpha q} |\nabla u|^q + \lambda f & \textit{dans } \Omega, \\ u > 0 & \textit{sur } \Omega, \end{cases} \tag{29}$$

où $q \leq p$, possède une solution minimale bornée $u_\varepsilon \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ au moins pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Pour le cas dégénéré $p > 2$, pour $\varepsilon > 0$, et pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on pose$-L_\varepsilon u = -\mathrm{div}((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u)$. Alors nous avons le lemme suivant :

Lemme 11

$$\begin{cases} -L_\varepsilon u = u^{\alpha q} |\nabla u|^q + \lambda f & \textit{dans } \Omega, \\ u > 0 & \textit{sur } \Omega, \end{cases} \tag{29}$$

où $q \leq p$, possède une solution minimale bornée $u_\varepsilon \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ au moins pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Théorème 12

Supposons que $p > 2$ et $1 \leq q \leq p$, alors le problème (25) possède une solutions distributionnelle positive.

Pour ce qui est de la régularité des solutions nous avons le théorème suivant :

Théorème 13

La solution u du problème (25) obtenue dans les théorèmes précédents, satisfait à

1. $u^{\frac{\gamma}{q}+1} \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *avec* $\gamma > -\frac{(\alpha q+1)}{p-q}$ *si* $p > q$ *et* $\alpha q \leq -1$
2. $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *si* $p > q$ *et* $-1 < \alpha q < 0$

Lorsque le second membre $f \in L^1(\Omega)$ on a le résultat suivant :

Théorème 14

Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\Omega)$. Supposons que $p-1 < q \leq p$ et $1 < a < p_1 = p(\frac{p^* - (p-1)}{p^*})$, alors le problème (25) possède une solution distributionnelle u telle que $u^{q\alpha}|\nabla u|^q \in L^1_{loc}(\Omega)$, $|\nabla u| \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$, et $H(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, où H est définie par

$$H(s) = \int_0^s \frac{1}{\sigma^{\frac{a}{p}}} e^{-\frac{\beta}{p\sigma^{a-1}}} d\sigma, \tag{30}$$

vérifiant $H(0) = 0$, avec $\beta > \frac{1}{-q\alpha-1}$.

L'idée de la démonstration consiste à suivre les étapes :

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration consiste à suivre les étapes :

1. Introduire la suite de problèmes approximants :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$

L'idée de la démonstration consiste à suivre les étapes :

1. Introduire la suite de problèmes approximants :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$

2. Utiliser $\dfrac{\varphi^p}{(u_n)^s}$, $s > 0$ comme fonction test, ce qui permet d'obtenir l'estimation

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \varphi \leq C_1 k + C_2,$$

et par suite $\{|\nabla u_n|\}_n$ est bornée dans $L^s_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration consiste à suivre les étapes :

1. Introduire la suite de problèmes approximants :
$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$
2. Utiliser $\dfrac{\varphi^p}{(u_n)^s}$, $s > 0$ comme fonction test, ce qui permet d'obtenir l'estimation
$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \varphi \leq C_1 k + C_2,$$
et par suite $\{|\nabla u_n|\}_n$ est bornée dans $L^s_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.
3. Pour démontrer la convergence forte des troncatures dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, on utilise $w_n\varphi$ comme fonction test dans (31) où $w_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u))$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration consiste à suivre les étapes :

1. Introduire la suite de problèmes approximants :
$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \dfrac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \dfrac{1}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^a} + T_n(f) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{31}$$
2. Utiliser $\dfrac{\varphi^p}{(u_n)^s}$, $s > 0$ comme fonction test, ce qui permet d'obtenir l'estimation
$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \varphi \leq C_1 k + C_2,$$
et par suite $\{|\nabla u_n|\}_n$ est bornée dans $L^s_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{N}{N-1}$.
3. Pour démontrer la convergence forte des troncatures dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, on utilise $w_n\varphi$ comme fonction test dans (31) où $w_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u))$.
4. L'utilisation du lemme de Vitali permet de conclure.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Théorème 15

Supposons que $\frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$*. Soit* f *une fonction positive telle que* $f \in L^1(\Omega)$*,* $p-1 < q \leq p$ *et* $a \geq p_1 = p(\dfrac{p^* - (p-1)}{p^*})$*, alors le problème* (25) *possède une solution distributionnelle* u*, telle que* $\frac{|\nabla u|^q}{u^a} \in L^1_{loc}(\Omega)$*,* $u \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $s < \frac{(p-1)N}{N-1}$*, et* $H(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$*, où* H *est définie dans (30) avec* $\beta > \frac{1}{a-1}$*.*

Supposons à présent que $p > 2$

Théorème 16

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et supposons que $1 < \sigma < p_1$, alors pour tout $f \in L^1(\Omega)$, le problème

$$-L_\varepsilon(v) = \frac{|\nabla v|^q}{v^\sigma} + f \ dans\ \Omega, \tag{32}$$

possède une solutions distributionnelle v_ε telle que $H(v_\varepsilon) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Théorème 17

Soit f une fonction positive telle que $f \in L^1(\Omega)$, $p-1 < q \leq p$ et $a \geq p_1$, alors le problème (25) possède une solution distributionnelle u telle que $\frac{|\nabla u|^q}{u^a} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in W^{1,s}_{loc}(\Omega)$ pour tout $s < \frac{(p-1)N}{N-1}$, et $H(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ où H est définie dans (30), avec $\beta > \frac{1}{a-1}$.

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

Nous avons aussi le résultat de multiplicité

Théorème 18

Supposons que $q = p$ *et* $-1 \leq q\alpha < 0$*. Soit* f *une fonction positive telle que* $f \in L^m(\Omega)$*,* $m > \dfrac{N}{p}$*, alors pour tout* $\lambda > 0$*, le problème* (25) *possède une infinité de solutions positives, dont au moins une est bornée, verifiant pour tout* $r < \frac{N}{N-1}$ *:*

$$si \alpha > -\frac{1}{2}, \int_\Omega e^{\frac{r}{1+2\alpha} u^{1+2\alpha}} |\nabla u|^r dx < \infty$$

$$et si \alpha = -\frac{1}{2}, \int_\Omega u^r |\nabla u|^r dx < \infty \text{ pour tout } r < \frac{N}{N-1}.$$

Problème elliptique avec terme en gradient et singularité nonlinéaire

L'idée de la démonstration est d'exploiter la correspondance via la transformation $v = H(u)$ de notre problème avec le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda D(v) f + \mu & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{33}$$

où μ est une mesure de Radon bornée positive, et où Posons $a = -q\alpha$, et soit

$$H(s) = \begin{cases} \frac{p-1}{p} s^{\frac{p}{p-1}} & \text{si } a = 1 \\ \int\limits_0^s e^{\frac{1}{(p-1)(1-a)}\sigma^{1-a}} d\sigma & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

et $D(s) = \left(H'(H^{-1}(s)\right)^{p-1}$.

Nous allons étudier l'existence et la nonexistence de solution du problème

$$(P_\pm)\begin{cases} -\Delta_p u \pm u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, $N \geq 3$, $1 < p < N$, $q > p - 1$ et h sont des fontions mesurables positives, vérifiant certaines hypothèses convenables.

Sur un problème elliptique avec poids de Hardy et termes en absorbtion-réaction

On commence par traiter le cas où le terme u^q est placé comme terme de réaction

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, avec $N \geq 3$, $1 < p < N$ et $q > p - 1$.

On commence par traiter le cas où le terme u^q est placé comme terme de réaction

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{34}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, contenant l'origine, avec $N \geq 3$, $1 < p < N$ et $q > p - 1$.

Théorème 19

Supposons que $q > q_+(\lambda) \equiv \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1}\right)$. *Alors pour tout* $\lambda > 0$, *le problème (34) ne possède aucune solution (entropique) positive.*

Sur un problème elliptique avec poids de Hardy et termes en absorbtion-réaction

Théorème 20

Supposons que $g : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ *est une fonction continue telle que* $g(s) > 0$ *si* $s > 0$ *et*

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^q} = c > 0 \textit{ pour un certain } q > q_+(\lambda).$$

alors on a les résultats suivants :

1. *Si* $g(0) = 0$*, alors l'unique solution entropique du problème*

$$-\Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + g(u), \ \textit{dans } \Omega, u_{|\partial\Omega} = 0, \qquad (35)$$

   est $u = 0$.

2. *Si* $g(0) > 0$ *alors le problème (35), n'admet aucune solution entropique positive.*

Sur un problème elliptique avec poids de Hardy et termes en absorbtion-réaction

Théorème 21

Fixons $q > q_+(\lambda)$ *et* $\lambda < \Lambda_{N,p}$*. Posons* $a_n(x) = \min\{n, \dfrac{1}{|x|^p}\}$,
$D_n(s) = \min\{n, s^q\}$, $s \geq 0$.
Soit $\{h_n\}_n \subset L^\infty(\Omega)$ *telle que* $h_n \geq 0$ *et* $h_n \uparrow h \in L^1(\Omega)$*. Et soit* u_n *la solutions minimale du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda a_n(x) u_n^{p-1} + g_n(u_n) + h_n \text{ dans } \Omega, \\ u_n \geq 0 \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{36}$$

Alors $u_n(x) \to \infty$ *quand* $n \to \infty$ *uniformément en* $x \in \Omega$

Théorème 22

Supposons que $\lambda \leq \Lambda_{N,p}$ et que $q < q_+(\lambda)$, alors

1. *Si $q < p^* - 1$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$, alors pour $h \equiv 0$, le problème* (34) *possède une solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
2. *Si $q < p^* - 1$ et $\lambda = \Lambda_{N,p}$, alors pour $h \equiv 0$, le problème* (34) *possède une solution positive $u \in W_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < p$.*
3. *Si $p^* - 1 \leq q < q_+(\lambda)$ et $\lambda < \Lambda_{N,p}$, alors il existe une constante positive c telle que si $h(x) \leq \frac{c}{|x|^p}$, alors le problème* (34)*possède une solutions entropique positive u telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.*

On revient maintenant sur le cas de problème avec terme absorbant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{37}$$

Sur un problème elliptique avec poids de Hardy et termes en absorbtion-réaction

On revient maintenant sur le cas de problème avec terme absorbant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u + u^q = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + h & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{37}$$

Théorème 23

Supposons que $q > q_* \equiv \frac{N(p-1)}{N-p}$, alors pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $h \in L^1(\Omega)$, le problème (37) possède une solution entropique minimale positive

Pour montrer l'optimalité des conditions du théorème 23, on énonce le résultat suivant :

Théorème 24

Supposons que $p-1 < q < q_*$. Si $\lambda > \Lambda_{N,p}$, alors le problème (37) ne possède pas de sursolution faible, dans le sens que
$u^q, \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p}, |\nabla u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$ *et*

$$\int \Big((-\Delta_p u)\phi + |u|^q\phi\Big)dx \geq \lambda \int \frac{u^{p-1}\,\phi}{|x|^p}dx + \int h(x)\phi\, dx,$$

pour toute $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

On s'interesse à l'étude des problèmes paraboliques du type

$$\begin{cases} (u^\theta)_t - \Delta_p u = \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q + f(x,t) \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u \geq 0 \text{ et } u(x,t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{38}$$

où θ est soit 1 ou $(p-1)$, $N \geq 3$, $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$ est un ouvert borné régulier tel que $0 \in \Omega$, $1 < p < N$, $q > 0$ et $u_0 \geq 0$, $f \geq 0$ vérifiant des hypthèses spécifiques.

En premier lieu nous nous penchons sur l'étude du problème dit doublement nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \left(u^{p-1}\right)_t - \Delta_p u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{39}$$

Pour le cas $\lambda > 0$ nous avons le lemme suivant :

Lemme 25

Soit u une solution du problème (39), alors $u(x,t) \to \infty$ quand $|x| \to 0$ pour chaque $t > 0$.

Pour le cas $\lambda > 0$ nous avons le lemme suivant :

Lemme 25

Soit u une solution du problème (39), alors $u(x,t) \to \infty$ quand $|x| \to 0$ pour chaque $t > 0$.

Théorème 26

1. *Si $\lambda > \Lambda_N$, alors le problème (39) ne possède aucune solution positive entropique.*
2. *Si $\lambda \leq \Lambda_N$ et $q > q_+(\lambda)$, alors le problème (39) ne possède aucune solution positive.*

Idée de la démonstration :

Idée de la démonstration :

1. Si $\lambda > \Lambda_N$, alors la non existence est une conséquence directe de l'inégalité de Picone, en s'inspirant de

J.A. Aguilar, I. Peral, *Positive radial solutions of quasilinear equations involving supercritical growth.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 5 (1998), no. 3, 309-331.

Idée de la démonstration :

1. Si $\lambda > \Lambda_N$, alors la non existence est une conséquence directe de l'inégalité de Picone, en s'inspirant de

J.A. Aguilar, I. Peral, *Positive radial solutions of quasilinear equations involving supercritical growth.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 5 (1998), no. 3, 309-331.

2. Pour le cas $\lambda \leq \Lambda_N$ et $q > q_+(\lambda)$; on procède par l'absurde en supposant l'existance de solution, et on arrive à une contradiction avec l'inégalité de Hardy.

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Théorème 27

Supposons que $q < q_+(\lambda)$, alors sous l'hypothèse $u_0(x) \leq A|x|^{-\beta}$, le problème (39) posséde une solution minimale positive.

Démonstration.

Si $q \leq p^* - 1$ et $u_0 \in L^p(\Omega)$, alors nous obtenons l'existence de solution dans l'espace d'énergie $L^p((0, T); W_0^{1,p}(\Omega))$ par les méthodes classiques. Dans le cas où $p^* - 1 < q < q_+(\lambda)$, pour obtenir l'existence de solution nous utlisons des arguments de monotonie. En effet notons que par un calcul direct nous pouvons construire une supersolution radiale de l'opérateur elliptique construite sous la forme $A|x|^{-\beta}$, sous l'hypothèse $u_0(x) \leq A|x|^{-\beta}$ et par un procédé d'itération on aboutit au résultat désiré. $\square$

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Supposons que $0 \leq \lambda < \Lambda_N$ et considérons le problème de Cauchy

$$(u^{p-1})_t - \Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \boldsymbol{R}^N, \tag{40}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^N$$

avec $p - 1 < q < q_+(\lambda)$.

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Supposons que $0 \leq \lambda < \Lambda_N$ et considérons le problème de Cauchy

$$(u^{p-1})_t - \Delta_p u = \lambda \frac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \boldsymbol{R}^N, \tag{40}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ dans } \boldsymbol{R}^N$$

avec $p - 1 < q < q_+(\lambda)$.

Définition 28

Soit $u(x,t)$ une solution positive de (40), on dira que u explose en temps fini (Blow up in finite time) s'il existe un $T^* < \infty$ tel que

$$\lim_{t \to T^*} \int_{B_r(0)} |x|^{-\alpha_1} u^{p-1}(x,t)\, dx = \infty,$$

sur toute boule $B_r(0)$.

Théorème 29

supposons que $q < F(\lambda) \equiv p - 1 + \dfrac{p(p-1)}{N - \alpha_1}$ *et soit* u *une solution du problème* (40) *telle que* $u(x, T) \geq C|x|^{-\alpha_1}$ *pour un certain* $T > 0$, *alors* u *explose en temps fini dans le sens de la définition précédente.*

Dans le but d'obtenir l'existence de solution globale, on construit des supersolutions w verifiant

$$(w^{p-1})_t - (p-1)|w'|^{p-2}w'' - \left(\frac{N-1}{r}\right)|w'|^{p-2}w' - \lambda\frac{w^{p-1}}{r^p} \geq w^q \tag{41}$$

Théorème 29

supposons que $q < F(\lambda) \equiv p - 1 + \dfrac{p(p-1)}{N - \alpha_1}$ *et soit* u *une solution du problème* (40) *telle que* $u(x, T) \geq C|x|^{-\alpha_1}$ *pour un certain* $T > 0$, *alors* u *explose en temps fini dans le sens de la définition précédente.*

Dans le but d'obtenir l'existence de solution globale, on construit des supersolutions w verifiant

$$(w^{p-1})_t - (p-1)|w'|^{p-2}w'' - \left(\frac{N-1}{r}\right)|w'|^{p-2}w' - \lambda\frac{w^{p-1}}{r^p} \geq w^q \tag{41}$$

On peut donc conclure que $F(\lambda) = p - 1 + \dfrac{p(p-1)}{N - \alpha_1}$ est un exposent de type Fujita relatif au problème (40).

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

On revient à l'étude du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x,0) & = & u_0(x), \end{cases} \tag{42}$$

Théorème 30

Supposons que $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ *et que* $q_+(\lambda) \equiv \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1}\right) < q < 1$. *Soit* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *une fonction positive telle que* $u_0(x) \le \dfrac{c}{|x|^{\frac{p}{2-p}}}$, *alors pour chaque* $\lambda > 0$, *le problème (42) possède une solution positive minimale.*

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Théorème 30

Supposons que $1 < p < \frac{2N}{N+2}$ *et que* $q_+(\lambda) \equiv \left((p-1) + \frac{p}{\alpha_1}\right) < q < 1$. *Soit* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *une fonction positive telle que* $u_0(x) \leq \dfrac{c}{|x|^{\frac{p}{2-p}}}$, *alors pour chaque* $\lambda > 0$, *le problème (42) possède une solution positive minimale.*

Idée de la preuve : Pour montrer l'existence de solution nous allons commencer par rechercher un "bonne" sur solution, l'usage de monotonie de l'opérateur nous permettra de conclure. La sur solution est fournie par la fonction autosimilaire :

$$S_{\lambda_0}(x,t) = \lambda_0 \left(\frac{t+T_0}{|x|^p}\right)^{\frac{1}{2-p}}$$

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Théorème 31

Soit $1 < p < 2$ *et supposons que* $\lambda \leq \Lambda_N$, *alors pour tout* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *et pour tout* $q \leq 1$, *le problème (42) possède une solution minimale positive* $u \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, *de plus si* $p > \frac{2N}{N+2}$, *sous certaines conditions (de petitesse) sur* $\|u_0\|_{L^2}$, *il existe un temps fini* T^* *pour lequel* $u(., t) \equiv 0$ *pour tout* $t \geq T^*$.

Sur un problème parabolique avec poids de Hardy et terme de réaction

Théorème 32

Soit $1 < p < 2$ *et soit* $q < p - 1$, *alors le problème*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x,0) & = & 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{43}$$

possède une solution globale u *telle que* $u(x,t) > 0$ *pour tout* $t > 0$ *et tout* $x \in \Omega$, *et donc pas d'extinction en temps fini.*

Théorème 32

Soit $1 < p < 2$ *et soit* $q < p-1$, *alors le problème*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{43}$$

possède une solution globale u *telle que* $u(x,t) > 0$ *pour tout* $t > 0$ *et tout* $x \in \Omega$, *et donc pas d'extinction en temps fini.*

La preuve est basée sur un argument de sous et sur-solutions.

Pour $p > 2$, considérons le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u & = & \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + u^q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \tag{44}$$

avec $\lambda < \Lambda_N$ et $q > q_+(\lambda)$

Théorème 33

Supposons que $q > q(\lambda)$ *et soit* v *une solution du problème*

$$\left\{\begin{array}{lll} v_t - \Delta_p v & = & 0 \text{ dans } \Omega_1 \times (0,T)\,, \\ v(x,t) & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \times (0,T), \\ v\,(x,0) & = & v_0\,(x) \ \text{ dans } \Omega_1, \end{array}\right. \tag{45}$$

où $v_0 \in L^\infty$. *Supposons que* $v(x,t) \geq C > 0$ *dans* $B_r(0) \times (t_1, t_2) \subset \Omega_1 \times (0,T)$, *alors le problème* (44) *ne possède aucune solution entropique* u *telle que* $u \geq v$ *dans* $\Omega_1 \times (0,T)$.

Perspectives

Perspectives

1. Etude des problèmes paraboliques associés à ceux étudiés aux chapitre 1 et chapitre 2.

Perspectives

1. Etude des problèmes paraboliques associés à ceux étudiés aux chapitre 1 et chapitre 2.
2. Affaiblir les conditions sur les données des problèmes étudiés.

1. Etude des problèmes paraboliques associés à ceux étudiés aux chapitre 1 et chapitre 2.
2. Affaiblir les conditions sur les données des problèmes étudiés.
3. Remplacer le potentiel dans le problème parabolique étudié en chapitre 4 par un terme en gradient.

Perspectives

1. Etude des problèmes paraboliques associés à ceux étudiés aux chapitre 1 et chapitre 2.
2. Affaiblir les conditions sur les données des problèmes étudiés.
3. Remplacer le potentiel dans le problème parabolique étudié en chapitre 4 par un terme en gradient.
4. Dans les problèmes étudiés dans le chapitre 3 et chapitre 4, placer la singularité (l'origine) sur le bord du domaine.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION