

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté des sciences  
Département de mathématiques

## MÉMOIRE DE MASTER

Option : Biomathématiques et Modélisation

---

# Épidémie d'opiacé : Étude Mathématique d'une population sous-traitement

---

Présenté Par : HAMLİ KHADİDJA

Mémoire soutenu le 28 juin 2018 devant le jury composé de :

M. MOUSSAOUI Ali	PROFESSEUR UABB TLEMCEEN	Président
M.TOUAOULA Mohammed Tarik	PROFESSEUR UABB TLEMCEEN	Examineur
M. MIRI Sofiane El-Hadi	MCA UABB TLEMCEEN	Encadreur

# DÉDICACES

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.

A tous les membres de ma famille, petits et grands



# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur MIRI Sofiane, qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son attention, ses conseils et son écoute qui ont été nécessaires pour la bonne réussite de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Un grand merci à Monsieur le Professeur MOUSSAOUI. Ali, pour avoir accepté de présider le jury qui examinera ce travail. Je lui témoigne de ma profonde reconnaissance pour son aide et son soutien durant ma formation et pour les enseignements qu'il nous a prodigués durant notre master.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur le Professeur TOUAOULA. M. T, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées ; aussi je le remercie vivement d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie aussi Monsieur Abdellaoui. B, pour avoir mis à notre disposition, en sa qualité de Directeur du Laboratoire d'Analyse Non-Linéaire et Mathématiques Appliquées, tous les moyens matériels qui ont facilité la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je ne saurais oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
<b>2 Modèle épidémiologique d’opiacé</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction	9
2.2 Le modèle mathématique	10
2.2.1 L’interprétaion des paramètres[13]	10
2.2.2 Les hypothèses du modèle[13]	10
2.3 Le taux de reproduction de base $R_0$	11
2.3.1 Définition de $R_0$	11
2.3.2 Définition de $R_0$ pour ce modèle	11
2.3.3 Calcul de $R_0$	11
2.4 Analyse de sensibilité du $R_0$ [1]	14
2.5 Stabilité locale de l’équilibre sans drogue $R_0 < 1$	16
2.6 Analyse du cas $R_0 = 1$	17
2.6.1 L’existence de bifurcation backward pour ce modèle	17
2.7 L’existence de l’équilibre endémique le cas $R_0 > 1$	22
2.7.1 La stabilité locale de l’équilibre endémique $R_0 > 1$	24
2.8 Simulation Numérique	27
<b>3 Modèle épidémiologique d’opiacé amélioré</b>	<b>29</b>
3.1 Introduction	29
3.2 Le modèle mathématique	29
3.2.1 L’hypothèses de modèle	29
3.3 La stabilité locale de l’équilibre sans drogue	31
3.4 Équilibre Endémique :	32
3.4.1 Système perturbé	33
3.5 La Stabilité Non Linéaire	38
3.5.1 La Stabilité Non Linéaire avec $\beta_3 > \beta_1$	38
3.5.2 La Stabilité Non Linéaire avec $\beta_1 > \beta_3$	39
3.6 La stabilité Globale	39
3.6.1 Application de la théorie de Poincaré Bendixson	39

---

3.7 Simulation Numérique . . . . .	41
<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>Table des figures</b>	<b>44</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# Introduction

Ce mémoire de master est consacré à l'étude mathématique d'un certain modèle épidémiologique. Le but étant d'obtenir des informations sur les solutions du modèle étudié, telles que la stabilité (locale et/ou globale), la bifurcation, et la sensibilité du paramètre  $R_0$ . La plupart des résultats obtenus sont illustrés par des simulations numériques, pour conforter l'étude théorique. Le travail est composé de deux chapitres dédiés à l'étude de la propagation de l'utilisation de l'héroïne dans une population donnée. Il est maintenant établi que la propagation de l'utilisation des drogues et opiacés, se fait de la même façon que n'importe quelle maladie infectieuse, à ceci près que la contamination ne se fait pas par contact physique, mais par influence. En effet un nouvel utilisateur de drogue est généralement initié par un ancien utilisateur.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on présente un modèle mathématique représentant la propagation de l'usage de la drogue dans une population donnée. Le chapitre qui suit contient le même modèle étudié dans le chapitre précédemment mentionné, considéré cette fois-ci avec un taux de recrutement non constant.





# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre on donne et on rappelle des notions et des définitions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Dans tout ce mémoire l'abréviation **IS** désignera l'indice de sensibilité

### La méthode de Van den Driessche et Watmough [10]

Nous aurons souvent à faire avec l'indice  $R_0$ , représentant le taux de reproduction de base, qui mesure le nombre de nouveaux cas infectés, à partir d'un unique individu infecté dans une population donnée. Il existe dans la littérature plusieurs techniques pour le calcul de  $R_0$ , nous en présentons une ici :

État de la population :  $(x_i), i = 1, \dots, n$ .

Dynamique :

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = F_i(x) + V_i^+(x) - V_i^-(x)$$

avec

$F_i(x)$  : la vitesse d'apparition des infectieux dans le compartiment  $i$ .

$V_i^+$  : la vitesse de transfert des individus dans le compartiment  $i$  par tout autre moyen.

$V_i^-$  : la vitesse de transfert hors du compartiment  $i$ .

- On ordonne les variables d'état afin que les  $m(\leq n)$  premières correspondent à des états infectés.
- États sans maladies :  $X_s = \{x | x_1 = \dots = x_m = 0\}$ .
- Équilibre sans maladie DFE (disease free equilibrium)  $x^* \in X_s$ .

Pour des raisons biologiques on a les propriétés suivantes :

1.  $x \geq 0 \implies F_i(x) \geq 0, V_i^+(x) \geq 0, V_i^-(x) \geq 0$
2.  $x_i = 0 \implies V_i^- = 0$  (pas de sortie d'un compartiment vide).
3. Pour  $i > m, F_i = 0$  (pas d'incidence pour états non infectés).
4.  $x \in X_s \implies F_i(x) = 0$  pour  $i < m, V_i^+(x) = 0$  (pas d'infection spontanée).
5. Si  $F = 0$ , le système est LAS en  $x^*$ , i.e.  $D(V^+ - V^-)(x^*)$  a des valeurs propres de partie réelle strictement négative.

Considérons la dynamique du système linéarisé au voisinage du point d'équilibre sans maladie.

$$\dot{x} = DV(x^*)(x - x^*) = DV^+(x^*)(x - x^*) - DV^-(x^*)(x - x^*)$$

Le résultat suivant précise la structure du système linéarisé  $DX(x^*)$  au voisinage de l'équilibre sans maladie  $x^*$ .

**Lemme 1** *Si  $x^*$  est un DFE, alors les matrices  $DF(x^*)$  et  $DV(x^*)$  se décomposent en blocs*

$$DF(x^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

$$DV(x^*) = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

$F \geq 0$  et  $V$  est une matrice de Metzler (terme extra-diagonaux  $\geq 0$ ) stable. La matrice  $-FV^{-1}$  est appelée la « matrice de seconde génération » ( en Anglais « next generation matrix »).[10]

**Définition 1** *Le nombre de reproduction de base  $R_0$  est le rayon spectral de la matrice de seconde génération : à savoir[10]*

$$R_0 = \rho(-FV^{-1})$$

Dans l'étude des modèles épidémiologiques, nous sommes souvent amené à étudier deux types d'équilibre, un équilibre sans maladie (ici dans ce mémoire et par analogie équilibre sans drogue) et un équilibre endémique qui a comme composante d'infectés strictement positive.

**Théoreme 1** *si  $R_0 \leq 1$  alors le point d'équilibre sans drogue (Drug free Equilibrium (DFE)) est localement asymptotiquement stable, sinon il est instable.[12]*

**Théoreme 2** *Si  $R_0 > 1$  le point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable.*

### Bifurcation backward

Lorsqu'un système dynamique

$$\dot{x} = f(x, \phi)$$

contient un ou plusieurs paramètres  $\phi$ , la valeur du paramètre pour laquelle un changement qualitatif ou quantitatif se produit est dite valeur de bifurcation. Il existe plusieurs types de bifurcation, mais nous nous limitons ici à la bifurcation backward.

**Théoreme 3** [3]

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S \\ \frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 \\ \frac{dU_2}{dt} = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 \end{cases}$$

$$A = D_w f(0, 0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial w_j} (0, 0) \right)$$

est la matrice de linéarisation du Système autour du point d'équilibre 0 avec  $\phi$  évaluée en 0. Zéro est une valeur propre simple de A et toutes les autres valeurs propres de A ont des parties réelles négatives ; la matrice A a un vecteur propre droit  $x$  et un vecteur propre gauche  $y$  répondant à la valeur propre zéro.

Soit  $f_k$  le  $k$ ème composante de  $f$  et :

$$a = \sum_{k,i,j=1}^3 y_k x_i x_j \frac{\partial^2 f_k(0, 0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$b = \sum_{k,i=1}^3 y_k x_i \frac{\partial^2 f_k(0, 0)}{\partial x_i \partial \phi}$$

Les dynamiques locales de système autour de 0 sont totalement déterminées par  $a$  et  $b$ .

i.  $a > 0, b > 0$ . Quand  $\phi < 0$  avec  $|\phi| \ll 1$ , 0 est localement asymptotiquement stable, et il existe un équilibre instable positif ; quand  $0 < \phi \ll 1$ , 0 est instable .

ii.  $a < 0, b < 0$ . Quand  $\phi < 0$  avec  $|\phi| \ll 1$ , 0 est instable ; quand  $0 < \phi \ll 1$ , 0 est localement asymptotiquement stable, et il existe un équilibre instable positif.

iii.  $a > 0, b < 0$ . Quand  $\phi < 0$  avec  $|\phi| \ll 1$ , 0 est instable, et il existe localement équilibre négatif asymptotiquement stable ; quand  $0 < \phi \ll 1$ , 0 est stable, et un équilibre instable positif apparaît.

iv.  $a < 0, b > 0$ . Lorsque  $\phi$  passe de négatif à positif, 0 passe de stable à instable. En conséquence, un équilibre instable négatif devient positif et localement asymptotiquement stable.

**Corollaire 1** Lorsque  $a > 0$  et  $b > 0$ , la bifurcation en  $\phi = 0$  est (backward).[3]

**Critère de Routh-Hurwitz**

Soit le système linéaire de dimension  $n$  suivant :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

avec  $i \in [1, n]$ , où  $A = [a_{ij}]$  est une matrice carrée de dimension  $n$  à coefficients constants. Nous faisons l'hypothèse que  $\det A \neq 0$ , ce qui implique notamment que l'origine est l'unique équilibre. La matrice  $A$  admet  $n$  valeurs propres qui sont solutions de l'équation caractéristique  $\det(A - \lambda I) = 0$ , qui est un polynôme de degré  $n$  que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Considérons les  $n$  déterminants suivants :

$$H_1 = a_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$H_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}$$

avec  $k \in [1, n]$ . Dans le cas de dimension  $n$ , tous les  $a_j$  avec  $j > n$  sont pris égaux à zéro. Nous avons le résultat suivant :

L'équilibre est asymptotiquement stable  $\iff \forall k \in [1, n], H_k > 0$ . [11]

**Définition 2** La règle de signe de Descartes

---

*C'est une Méthode pour déterminer le nombre de racines positives d'un polynôme d'une seule variable avec des coefficients réels différents de zéro, ordonnés par ordre décroissant des exposants telle que si  $n$  est le nombre de changements de signes, alors  $n$  est le nombre maximum de racines positives (et s'il n'y en a pas exactement  $n$ , alors il y en a  $n-2$ , ou  $n-4$ , ou...).*[4][2]

**Théoreme 4** (Poincaré Bendixson)[8]

*Soit  $D$  un domaine attractant du plan pour un système planaire, toute trajectoire de  $D$  soit tend vers un point d'équilibre (ou une réunion de points d'équilibre), soit tend vers un cycle limite.*

**Définition 3** (Domaine positivement invariant)[5]

*Un domaine  $D$  est dit positivement invariant si quelle que soit la condition initiale  $(x_0, y_0) \in D$ , la trajectoire correspondante reste dans  $D$ .*

**Théoreme 5** (Critère de Dulac)[8]

*Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

*et  $D$  un domaine connexe*

*Soit  $B$  une fonction de classe  $C^1(D)$ .*

*si*

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$$

*est de signe constant alors, il n'ya pas de cycle limite entièrement contenu dans  $D$ .*



# Chapitre 2

## Modèle épidémiologique d'opiacé

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous reprenons un modèle introduit par White et Comiskey(2.1)[13] où l'usage des drogues (l'héroïne en particulier) est considéré de la même façon qu'une épidémie, le modèle est schématisé dans la figure (2.1); chaque compartiment de la figure (2.1) représente une étape de l'utilisation de drogue. Le but de ce chapitre est l'étude mathématique de ce modèle (calcul de  $R_0$ , sensibilité de  $R_0$ , analyse du cas  $R_0 = 1$ , l'existence des points d'équilibre, leur stabilité, et la simulation numérique).

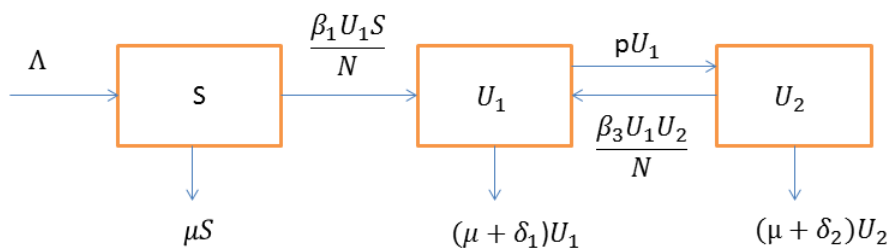


FIGURE 2.1 – le diagramme pour le modèle 1



## 2.2 Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S \\ \frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 \\ \frac{dU_2}{dt} = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

### 2.2.1 L'interprétation des paramètres[13]

$N$  :La taille de la population totale.

$S$  :Le nombre de personnes susceptibles dans la population. Ici, tous les individus vont de l'âge de 15 à 64.

$U_1$  :Le nombre d'utilisateurs de drogues qui ne sont pas en traitement, les débutants ; les utilisateurs de drogues qui rechutent.

$U_2$  : Le nombre de consommateurs de drogues sous traitement.

$\Lambda$  :Le nombre d'individus dans la population générale trouvé dans la population réceptive, c.-à-d. les processus démographiques des personnes atteignant l'âge de 15 ans dans la période de modélisation.

$\mu$  :Le taux de mortalité naturelle de la population en général.

$\delta_1$  :Est un taux qui inclut :

- Les décès dus à la drogue des consommateurs qui ne sont pas sous traitement.
- Un arrêt spontané de l'usage de la drogue.
- Les individus qui ne sont pas sous traitement et qui arrêtent la drogue sans pour autant devenir susceptible.

$\delta_2$  :

- Est un taux de mortalité des usagers de drogue qui sont sous traitement.
- Guérison totale et définitive (du moins sur la durée de l'étude).

$\beta_1$  :La probabilité de devenir un drogué.

$p$  :La proportion de drogués qui entrent dans le traitement.

$\beta_3$  :La probabilité qu'un usager de drogue sous traitement qui rechute.

### 2.2.2 Les hypothèses du modèle[13]

- $N = S + U_1 + U_2$

On suppose que la taille finale de la population est constante, donc on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = 0 = \frac{dS}{dt} + \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} \\ &\iff \Lambda = \mu S + (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2 \end{aligned}$$

- Les personnes sous traitement utilisent des médicaments.
- Une proportion d'utilisateurs qui ne sont pas en traitement arrêtent de se droguer dans chaque période de temps de modélisation ; ceci correspond encore à ce qui est observé dans la pratique.
- Les utilisateurs de drogues qui ne sont pas en traitement sont infectieux pour les personnes sensibles et les utilisateurs sous traitement.
- Les utilisateurs en traitement rechutent le plus souvent en raison d'un contact avec des utilisateurs qui ne sont pas sous traitement.
- Les utilisateurs de drogues en traitement ne sont pas infectieux pour les personnes sensibles.
- Chaque individu dans la population a une chance égale de rencontrer un autre individu.
- Tous les membres de la population sont supposés être également sensibles à la toxicomanie. En pratique, certaines sous-populations sont plus sensibles en raison de facteurs environnementaux, comportementaux et génétiques. Ici, une valeur moyenne de  $\beta_1$  par rapport à la population générale.

## 2.3 Le taux de reproduction de base $R_0$

### 2.3.1 Définition de $R_0$

Le taux de reproduction de base  $R_0$ , est le nombre moyen des individus susceptibles qui ont été infectés par un individu infectieux.[9]

### 2.3.2 Définition de $R_0$ pour ce modèle

$R_0$  est la probabilité de devenir dépendant aux drogues multiplié par la moyenne du temps d'utilisation de médicaments sans traitement. En fonction des paramètres du modèle.[13]

### 2.3.3 Calcul de $R_0$

Le point d'équilibre sans drogue (DFE)

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S \quad (2.2)$$

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 \quad (2.3)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 \quad (2.4)$$

$U_1 = 0$  et  $U_2 = 0$  en remplace dans (2.2) , avec

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0 &\implies \Lambda - \mu S = 0, \\ &\implies S = \frac{\Lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

On trouve

$$DFE = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right).$$

### Calcul de $R_0$

On va calculer  $R_0$  par la méthode de van den Driessche et Watmough. [10]

soit  $F, V$  les deux matrices :

$$F = \begin{pmatrix} f_1(S, U_1, U_2) \\ f_2(S, U_1, U_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 U_1 S}{N} + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1(U_1, U_2) \\ v_2(U_1, U_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -pU_1 - (\mu + \delta_1)U_1 \\ pU_1 - (\mu + \delta_2)U_2 \end{pmatrix}$$

Les dérivées de  $f_1, f_2$  par rapport  $U_1$  et  $U_2$  respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(S, U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1(S, U_1, U_2)}{\partial U_2} \\ \frac{\partial f_2(S, U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial f_2(S, U_1, U_2)}{\partial U_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 s^*}{N} + \frac{\beta_3 u_2^*}{N} & \frac{\beta_3 u_1^*}{N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les dérivées de  $v_1, v_2$  par rapport  $U_1$  et  $U_2$  respectivement :

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1(U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial v_1(U_1, U_2)}{\partial U_2} \\ \frac{\partial v_2(U_1, U_2)}{\partial U_1} & \frac{\partial v_2(U_1, U_2)}{\partial U_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p - (\mu + \delta_1) & 0 \\ p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice inverse de V

$$V^{-1} = \frac{1}{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)} \begin{pmatrix} -(\mu + \delta_2) & 0 \\ -p & -p - (\mu + \delta_1) \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de V est :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{p + \mu + \delta_1} & 0 \\ \frac{-1}{(\mu + \delta_2)} & \frac{-1}{(\mu + \delta_2)} \end{pmatrix}$$

On calcule le rayon spectral de la matrice  $(-FV^{-1})$  :

$$(-FV^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p + \mu + \delta_1} & 0 \\ \frac{p}{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)} & \frac{1}{\mu + \delta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu(p + \mu + \delta_1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le rayon spectral de la matrice  $(-FV^{-1})$  est :

$$\rho(-FV^{-1}) = \frac{\frac{\beta_1 \Lambda}{N\mu}}{p + \mu + \delta_1}$$

or

$$N = s^* + u_1^* + u_2^* \iff N = \frac{\Lambda}{\mu}$$

alors

$$\rho(-FV^{-1}) = \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}$$

donc

$$R_0 = \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}$$

## 2.4 Analyse de sensibilité du $R_0$ [1]

On a vu que  $R_0 = \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}$

Soit  $p_1 = \beta_1; p_3 = \mu; p_2 = p; p_4 = \delta_1$

On va calculer l'indice de sensibilité (IS) normalisé. le paramètre  $\beta_1$  variable et considère les autres paramètres  $p, \mu, \delta_1$  constant.

$$dp_1 = \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} = 1$$

$$dp_2 = \frac{\partial p}{\partial \beta_1} = 0$$

$$dp_3 = \frac{\partial \mu}{\partial \beta_1} = 0$$

$$dp_4 = \frac{\partial \delta_1}{\partial \beta_1} = 0$$

$p_1, p_2, p_3, p_4, dp_1, \dots, dp_4$  sont appelées variables d'entrée.

On considère les variables suivantes :

$$w_1 = \beta_1; w_2 = p + \mu + \delta_1$$

$$\text{donc } w_1 = p_1 \implies dw_1 = dp_1 = 1$$

$$w_2 = p_2 + p_3 + p_4 \implies dw_2 = dp_2 + dp_3 + dp_4 \implies dw_2 = 0$$

on pose :

$$R_0 = w_3 = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1}$$

la dérivée  $\frac{\partial R_0}{\partial \beta_1}$

on a  $w_3 = \frac{w_1}{w_2}$

$$dw_3 = \frac{dw_1 w_2 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{1}{w_2} = \frac{1}{p + \mu + \delta_1}$$

le IS est calculé, comme la variable de sortie  $A_{\beta_1}$ .

$$A_{\beta_1} = \frac{p_4}{w_3} dw_3 = \frac{\beta_1}{R_0} dw_3$$

$$A_{\beta_1} = \frac{\frac{\beta_1}{\beta_1}}{\frac{1}{p + \mu + \delta_1}} = 1 \quad (2.5)$$

On peut calculer directement l' IS pour les autres paramètres.

Le IS est calculé, comme la variable de sortie  $A_p$ .

$$A_p = \frac{p}{R_0} dR_0 = \frac{p}{R_0} \frac{\partial R_0}{\partial p}$$

$$A_p = \frac{p}{R_0} \frac{-\beta_1}{(p + \mu + \delta_1)^2} = \left| \frac{-p}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1$$

Le IS est calculé, comme la variable de sortie  $A_\mu$ .

$$A_\mu = \frac{\mu}{R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \mu} = \frac{\mu}{R_0} \frac{-\beta_1}{(p + \mu + \delta_1)^2} = \left| \frac{-\mu}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1$$

Le IS est calculé, comme la variable de sortie  $A_{\delta_1}$ .

$$A_{\delta_1} = \frac{\delta_1}{R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \delta_1} = \frac{\delta_1}{R_0} \frac{-\beta_1}{(p + \mu + \delta_1)^2} = \left| \frac{-\delta_1}{p + \mu + \delta_1} \right| < 1$$

On conclut que  $\beta_1$  est le paramètre le plus influent dans  $R_0$ .

### Conclusion :

D'après l'analyse de sensibilités du  $R_0$ , on conclut que  $R_0$  est plus sensible au paramètre  $\beta_1$ ; l'augmentation de  $\beta_1$  entraîne une augmentation proportionnelle de  $R_0$ , mais les autres paramètres

$\mu, \delta_1, p$  sont en relation inversement proportionnelle à  $R_0$ . Une augmentation de l'un d'entre eux entraînera une diminution de  $R_0$ . La taille de la diminution sera proportionnellement plus petite.

## 2.5 Stabilité locale de l'équilibre sans drogue $R_0 < 1$

$$(DFE) = (s^*, u_1^*, u_2^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$$

soit  $J$  la matrice jacobienne :

$$J(s, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta_1 u_1}{N} & \frac{-\beta_1 s}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1 u_1}{N} & \frac{\beta_1 s}{N} - p + \frac{\beta_3 u_2}{N} - (\mu + \delta_1) & \frac{\beta_3 u_1}{N} \\ 0 & p - \frac{\beta_3 u_2}{N} & \frac{-\beta_3 u_1}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne au point d'équilibre sans drogue (DFE).

$$J\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

les valeurs propres :

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \delta_2) < 0$$

$$\lambda_3 = \beta_1 - (p + \mu + \delta_1)$$

$$\lambda_3 = \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) = (p + \mu + \delta_1) \left( \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1} - 1 \right) = (p + \mu + \delta_1) (R_0 - 1) < 0 \text{ si } R_0 < 1 \implies \lambda_3 < 0$$

donc  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$

si

$$R_0 < 1$$

alors (DFE) est localement asymptotiquement stable.

## 2.6 Analyse du cas $R_0 = 1$

### 2.6.1 L'existence de bifurcation backward pour ce modèle

Si  $a > 0$  et  $b > 0$ , la bifurcation à  $\phi = 0$  est backward (en arrière). L'existence d'une bifurcation backward (en arrière) signifie qu'il existe de multiples équilibres endémiques ; en particulier, un équilibre endémique existe lorsque  $R_0 < 1$  et un effort substantiel est nécessaire pour réduire  $R_0$  à un niveau suffisamment faible pour éradiquer la maladie de la population,  $\beta_1$  est le paramètre de bifurcation puisque on a montré dans (2.5) que  $R_0$  est plus sensible aux changements de  $\beta_1$ .

$$\begin{aligned} R_0 = 1 &\Leftrightarrow \frac{\beta_1}{p + \mu + \delta_1} = 1 \\ &\implies \beta_1^* = p + \mu + \delta_1 \end{aligned}$$

**Linéarisation de système autour de DFE lorsque  $\beta_1 = \beta_1^*$**

On pose :

$$X_1 = S - S^*; X_2 = U_1; X_3 = U_2$$

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1^*}{N} X_2 (X_1 + S^*) - \mu (X_1 + S^*) \\ \frac{dX_2}{dt} = \frac{\beta_1^*}{N} X_2 (X_1 + S^*) - p X_2 + \frac{\beta_3 X_2 X_3}{N} - (\mu + \delta_1) X_2 \\ \frac{dX_3}{dt} = p X_2 - \frac{\beta_3 X_2 X_3}{N} - (\mu + \delta_2) X_3 \end{cases} \quad (2.6)$$

La matrice jacobienne de (2.6) au point  $(0,0,0)$  :

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} \Big|_{\beta_1^*} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} = A$$

les valeurs propres  $(0, -\mu, -(\mu + \delta_2))$ , 0 est une valeur propre et il y'a deux valeurs propres de parties réelles négatives.



Le vecteur propre à droite associé à la valeur propre 0

$$AV = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x\mu - \beta_1^*y = 0 \\ py - (\mu + \delta_2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\beta_1^*}{\mu}y \\ y = \frac{\mu + \delta_2}{p}z \end{cases}$$

$$\text{On pose } z = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\mu + \delta_2}{p} \\ x = -\frac{\beta_1^*}{\mu} \frac{\mu + \delta_2}{p} \end{cases}$$

Donc le vecteur propre à droite associé à la valeur propre 0 est  $(-\frac{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)}{\mu}; \frac{\mu + \delta_2}{p}; 1)$

le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 0 est  $(0,1,0)$

$$w^T A = 0 \Leftrightarrow (w_1 \ w_2 \ w_3) \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & -(\mu + \delta_2) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\mu w_1 = 0 \\ -\beta_1^* w_1 + p w_3 = 0 \\ -w_3(\mu + \delta_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_3 = 0 \end{cases}$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On choisit  $w_2 = 1$

$$\text{donc } w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après le système (2.6) on pose :

$$f_1(X_1, X_2, X_3) = \Lambda - \frac{\beta_1 X_2 (X_1 + S^*)}{N} - \mu (X_1 + S^*)$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3) = \frac{\beta_1 X_2 (X_1 + S^*)}{N} - p X_2 + \frac{\beta_3 X_2 X_3}{N} - (\mu + \delta_1) X_2$$

$$f_3(X_1, X_2, X_3) = p X_2 - \frac{\beta_3 X_2 X_3}{N} - (\mu + \delta_2) X_3$$

$$D_x f = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta_1 X_2}{N} & -\frac{\beta_1}{N} (X_1 + S^*) & 0 \\ \beta_1 \frac{X_2}{N} & \beta_1 \frac{(X_1 + S^*)}{N} - p + \frac{\beta_3 X_3}{N} - (\mu + \delta_1) & \frac{\beta_3 X_2}{N} \\ 0 & p - \frac{\beta_3 X_3}{N} & -\frac{\beta_3 X_2}{N} - \frac{\beta_3 X_3}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

**Les dérivées secondes de  $f_1$  :**

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-\beta_1}{N}; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-\beta_1}{N}; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-X_2}{N} \Big|_{(0,0,0)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-(X_1 + S^*)}{N} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-S^*}{N};$$

$$\frac{\partial^2 f_1(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0;$$

Les dérivées secondes de  $f_2$  :

$$\frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{\beta_1}{N}; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{\beta_1}{N}; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{\beta_3}{N}$$

$$\frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{\beta_3}{N}; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{X_2}{N} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{X_1 + S^*}{N} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{S^*}{N};$$

$$\frac{\partial^2 f_2(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0;$$

Les dérivées secondes de  $f_3$  :

$$\frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial X_3} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-\beta_3}{N}$$

$$\frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial X_2} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{-\beta_3}{N}; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3^2} \Big|_{(0,0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0; \frac{\partial^2 f_3(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3 \partial \beta_1} \Big|_{(0,0,0)} = 0;$$

### Calcul de $a$ et $b$

On définit  $a$  et  $b$  par les équations suivantes :

$$a = \sum_{k,i,j=1}^3 y_k x_i x_j \frac{\partial^2 f_k(0,0,0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$b = \sum_{k,i=1}^3 y_k x_i \frac{\partial^2 f_k(0,0,0)}{\partial x_i \partial \beta_1}$$

Le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre 0 est :

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre à droite associé à la valeur propre 0 est :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)}{p\mu} \\ \frac{\mu + \delta_2}{p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Calcul $a$

$$a = y_2 x_1 x_1 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_1^2} + y_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_1 \partial x_2} + y_2 x_1 x_3 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_1 \partial x_3} + y_2 x_2 x_1 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_2 \partial x_1} + y_2 x_2 x_2 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_2^2} + y_2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_2 \partial x_3} + y_2 x_3 x_1 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_3 \partial x_1} + y_2 x_3 x_2 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_3 \partial x_2} + y_2 x_3 x_3 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_3^2}$$

$$a = 2y_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_1 \partial x_2} + 2y_2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$a = 2x_1 x_2 \frac{\beta_1^*}{N} + 2x_2 x_3 \frac{\beta_3}{N} \quad (2.7)$$

On remplace  $x$  et  $y$  dans (2.7)

$$a = -2 \frac{(p + \mu + \delta_1)(\mu + \delta_2)}{p\mu} \frac{(\mu + \delta_2)}{p} \frac{\beta_1^*}{N} + 2 \frac{(\mu + \delta_2)}{p} \frac{\beta_3}{N}$$

$$a = 2 \frac{(\mu + \beta_2)}{pN} \left[ \beta_3 - \frac{(p + \mu + \delta_1)^2 (\mu + \delta_2)}{p\mu} \right]$$

$$a > 0 \text{ si est seulement si } \beta_3 > \frac{(p + \mu + \delta_1)^2 (\mu + \delta_2)}{p\mu}$$

**calcul b**

$$\begin{aligned} b &= \sum_{k,j=1}^3 y_k x_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial \beta_1} \\ &= y_2 x_1 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_1 \partial \beta_1} + y_2 x_2 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_2 \partial \beta_1} + y_2 x_3 \frac{\partial^2 f_2(0,0,0)}{\partial x_3 \partial \beta_1} \end{aligned}$$

$$= x_2 \frac{s^*}{N} = \frac{\mu + \delta_2}{p} \frac{\Lambda}{\mu N}$$

$$b = \frac{\mu + \delta_2}{p} > 0$$

**Conclusion :**

si  $a > 0$  et  $b > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_1^*$  le bifurcation est backward avec  $\beta_3 > \frac{(p + \mu + \delta_1)^2 (\mu + \delta_2)}{p\mu}$

## 2.7 L'existence de l'équilibre endémique le cas $R_0 > 1$

L'équation(2.2) au point d'équilibre endémique :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0 &\iff \Lambda - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - \mu S = 0 \\ \iff \Lambda &= S \left( \frac{\beta_1 U_1}{N} + \mu \right) = S \left( \frac{\beta_1 U_1 + \mu N}{N} \right) \end{aligned}$$

$$\implies S^* = \frac{\Lambda N}{\beta_1 U_1 + \mu N} \quad (2.8)$$

L'équation(2.3) au point d'équilibre endémique :

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} = 0 &\iff \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 = 0 \\ &\implies U_2 \frac{\beta_3 U_1}{N} = pU_1 + (\mu + \delta_1)U_1 - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} \\ &\implies U_2 = \frac{N}{\beta_3 U_1} U_1 [p + (\mu + \delta_1) - \frac{\beta_1 S}{N}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

on remplace (2.8) dans (2.9) est on trouve l'équation suivante :

$$U_2^* = \frac{N}{\beta_3} [p + \mu + \delta_1 - \frac{\beta_1}{N} \frac{\Lambda N}{\beta_1 U_1^* + \mu}] \quad (2.10)$$

l'équation(2.4) au point d'équilibre endémique :

$$\begin{aligned} \frac{dU_2}{dt} = 0 &\iff pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 = 0 \\ &\iff pU_1 - [\frac{\beta_3 U_1}{N} + (\mu + \delta_2)][(p + \mu + \delta_1) - \frac{\beta_1}{N} \frac{\Lambda N}{\beta_1 U_1 + \mu N}] \frac{N}{\beta_3} = 0 \\ &\iff pU_1 - (p + \mu + \delta_1)U_1 + \frac{\beta_1 \Lambda U_1}{(\beta_1 U_1 + \mu N)} + \frac{\beta_1 \Lambda (\mu + \delta_2) N}{\beta_1 U_1 + \mu N} \frac{N}{\beta_3} = \frac{N}{\beta_3} (\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1) \\ &\iff \frac{-(\mu + \delta_1)U_1(\beta_1 U_1 + \mu N)\beta_3 + \beta_1 \beta_3 \Lambda U_1 + \beta_1 (\mu + \delta_2) N \Lambda}{\beta_3 (\beta_1 U_1 + \mu N)} = \frac{N}{\beta_3} (\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1) \\ &\iff [-(\mu + \delta_1)\beta_3 \beta_1]U_1^2 + [-\beta_3(\mu + \delta_1)\mu N + \beta_1 \beta_3 \Lambda]U_1 + \beta_1 (\mu + \delta_2) N \Lambda = N(\mu + \delta_2) \\ &\quad (p + \mu + \delta_1)(\beta_1 U_1 + \mu N) \\ &\iff [-(\mu + \delta_1)\beta_3 \beta_1]U_1^2 + [-\beta_3(\mu + \delta_1)\mu N + \beta_1 \beta_3 \Lambda - N(\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1)\beta_1]U_1 \\ &\quad + [\beta_1 (\mu + \delta_2) N \Lambda - \mu N^2 (\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1)] = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow aU_1^2 + bU_1 + c = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = -(\mu + \delta_1)\beta_3\beta_1 \\ b = -\beta_3(\mu + \delta_1)\mu N + \beta_1\beta_3\Lambda - N(\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1)\beta_1 \\ c = \beta_1(\mu + \delta_2)N\Lambda - \mu N^2(\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -(\mu + \delta_1)\beta_3\beta_1 < 0 \\ b = \beta_1\beta_3\Lambda - (\beta_3(\mu + \delta_1)\mu N + N(\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1)\beta_1) \\ c = \beta_1(\mu + \delta_2)N\Lambda - \mu N^2(\mu + \delta_2)(p + \mu + \delta_1) \end{cases}$$

On applique la règle de signe de Descartes pour résoudre l'équation (2.11)

1<sup>re</sup> cas

$$\text{si } c > 0 \Leftrightarrow R_0 > \mu \frac{N}{\Lambda}$$

D'après la règle de signe de Descartes il ya un changement de signe donc soit il existe une unique solution, soit pas de solution.

2<sup>e</sup> cas

$$\text{si } c < 0 \Leftrightarrow R_0 < \mu \frac{N}{\Lambda} \text{ Et dans ce cas on a :}$$

- si  $b < 0$  d'après la règle de signe de Descartes il n'y a pas des changements de signe donc la solution n'existe pas.
- si  $b > 0$  d'après la règle de signe de Descartes il ya deux changements de signe donc il existe deux solutions.

### 2.7.1 La stabilité locale de l'équilibre endémique $R_0 > 1$

Soit J la matrice jacobienne de (2.1) au point d'équilibre  $(s^*, u_1^*, u_2^*)$

$$J(s^*, u_1^*, u_2^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta_1 u_1^*}{N} & -\frac{\beta_1 s^*}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1 u_1^*}{N} & \frac{\beta_1 s^*}{N} - p + \frac{\beta_3 u_2^*}{N} - (\mu + \delta_1) & \frac{\beta_3 u_1^*}{N} \\ 0 & p - \frac{\beta_3 u_2^*}{N} & -\frac{\beta_3 u_1^*}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

on a

$$(2.3) \iff \left[ \frac{\beta_1 s^*}{N} - p + \frac{\beta_3 u_2^*}{N} - (\mu + \delta_2) \right] u_1^* = 0 \text{ avec } u_1^* \neq 0$$

donc

$$\frac{\beta_1 s^*}{N} - p + \frac{\beta_3 u_2^*}{N} - (\mu + \delta_2) = 0 \quad (2.12)$$

$$(2.4) \iff \left[ p - \frac{\beta_3 u_2^*}{N} \right] u_1^* = (\mu + \delta_2) u_2^*$$

$$\implies p - \frac{\beta_3 u_2^*}{N} = (\mu + \delta_2) \frac{u_2^*}{u_1^*} \quad (2.13)$$

On remplace les équations (2.12) et (2.13) dans la matrice jacobienne, cette matrice devient

$$J(s^*, u_1^*, u_2^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta_1 u_1^*}{N} & -\frac{\beta_1 s^*}{N} & 0 \\ \frac{\beta_1 u_1^*}{N} & 0 & \frac{\beta_3 u_1^*}{N} \\ 0 & (\mu + \delta_2) \frac{u_2^*}{u_1^*} & -\frac{\beta_3 u_1^*}{N} - (\mu + \delta_2) \end{pmatrix}$$

$$\det(J - \lambda I) = 0 \iff \left( -\mu - \beta_1 \frac{u_1^*}{N} - \lambda \right) \left[ \lambda \left( \beta_3 \frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2 + \lambda \right) - \beta_3 \frac{u_2^*}{N} (\mu + \delta_2) \right] - \beta_1^2 \frac{u_1^* s^*}{N^2} \left( \beta_3 \frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2 + \lambda \right) = 0$$

$$\iff \lambda^3 + \lambda^2 \left[ \left( \beta_3 + \beta_1 \right) \frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2 \right] - \lambda \left[ \beta_3 \frac{u_2^*}{N} (\mu + \delta_2) - \left( \mu + \beta_1 \frac{u_1^*}{N} \right) \left( \beta_3 \frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2 \right) - \beta_1^2 \frac{s^* u_1^*}{N^2} \right] - \left( \mu + \beta_1 \frac{u_1^*}{N} \right) \left( \beta_3 \frac{u_2^*}{N} (\mu + \delta_2) \right) + \beta_1^2 \frac{u_1^* s^*}{N^2} \left( \beta_3 \frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2 \right) = 0$$



$$\iff \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = (\beta_3 + \beta_1)\frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2 \\ a_2 = -\beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2) + (\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2} \\ a_3 = -(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2)) + \beta_1^2\frac{u_1^*s^*}{N^2}(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) \end{cases}$$

$$H_1 = a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3$$

$$= ((\beta_3 + \beta_1)\frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2)[- \beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2) + (\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}] + (\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2)) - \beta_1^2\frac{u_1^*s^*}{N^2}(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2)$$

$$= ((\beta_3 + \beta_1)\frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2)(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N}) - \beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2)(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) - \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2)$$

$$H_2 = [((\beta_3 + \beta_1)\frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2)(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})] - \beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2)(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2)$$

$$H_2 > 0 \text{ ssi } [((\beta_3 + \beta_1)\frac{u_1^*}{N} + 2\mu + \delta_2)(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) + \beta_1^2\frac{s^*u_1^*}{N^2}(\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})] > \beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2)(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3[a_1a_2 - a_3] > 0 \text{ si } a_3 > 0 \text{ et } [a_1a_2 - a_3] > 0$$

$$a_3 > 0 \iff \beta_1^2\frac{u_1^*s^*}{N^2}(\beta_3\frac{u_1^*}{N} + \mu + \delta_2) > (\mu + \beta_1\frac{u_1^*}{N})(\beta_3\frac{u_2^*}{N}(\mu + \delta_2))$$

D'après le Critère de Routh-Hurwitz (R-H) le point d'équilibre  $(s^*, u_1^*, u_2^*)$  est localement asymptotiquement stable (L.A.S) ssi  $a_3 > 0$  et  $a_1a_2 - a_3 > 0$ . [11]

## 2.8 Simulation Numérique

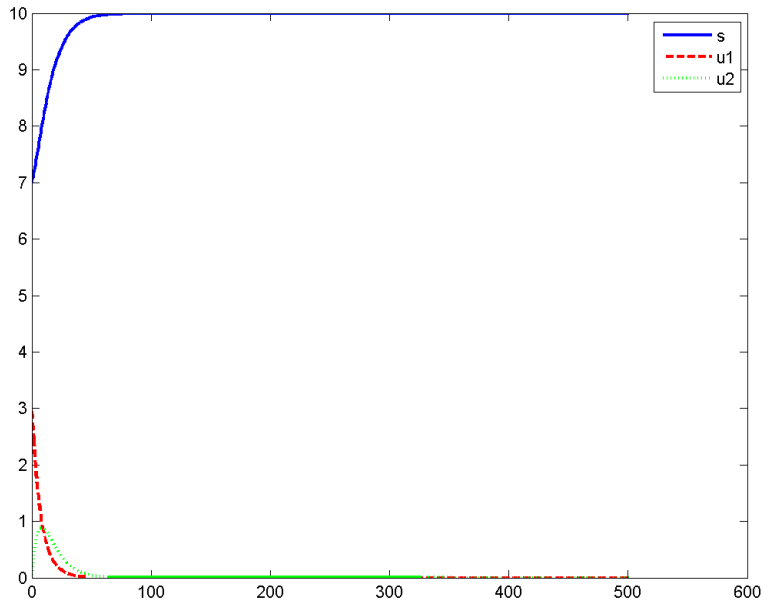


FIGURE 2.2 – simulation numérique pour  $R_0 < 1$   
avec ces paramètres

$\mu = 0.1; N = 10; \beta_3 = 0.02; \delta_2 = 0.01; p = 0.1; \delta_1 = 0.01; \beta_1 = 0.1; \Lambda = 1;$

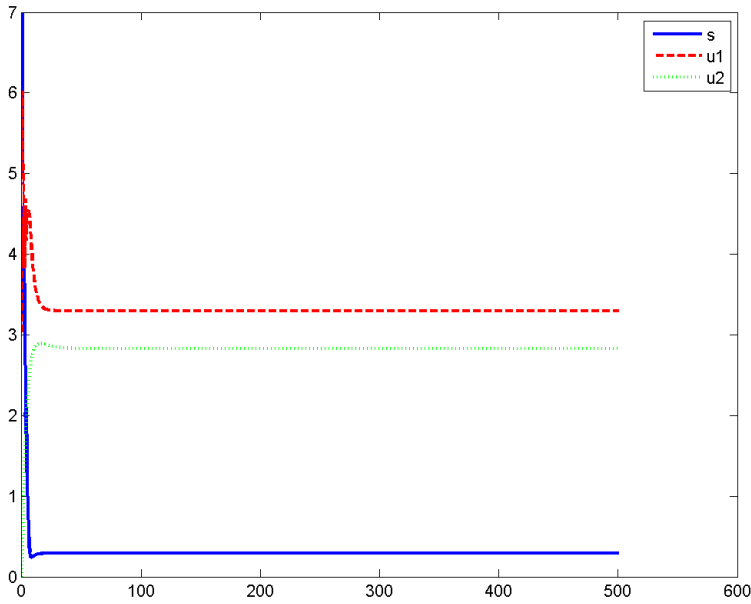


FIGURE 2.3 – simulation numérique pour  $R_0 > 1$

1<sup>er</sup> cas  $R_0 > \mu \frac{N}{\Lambda}$  avec ces paramètres  
 $\mu = 0.1; N = 10; \beta_3 = 0.02; \delta_2 = 0.01; p = 0.1; \delta_1 = 0.1; \beta_1 = 10; \Lambda = 1;$

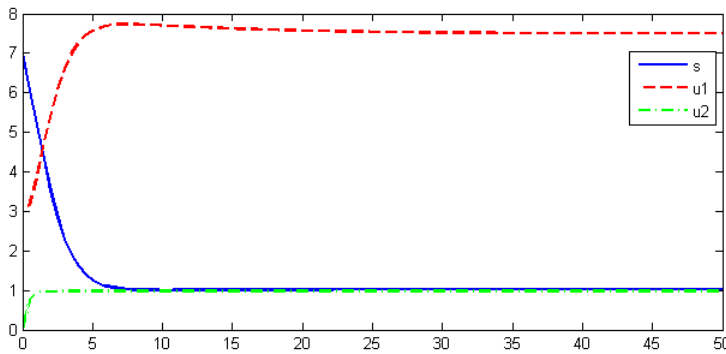


FIGURE 2.4 – simulation numérique pour  $R_0 > 1$

2<sup>eme</sup> cas  $R_0 < \mu \frac{N}{\Lambda}$  avec ces paramètres  
 $\mu = 0.1; N = 10; \beta_3 = 0.02; \delta_2 = 0.00001; p = 0.99; \delta_1 = 0.00001; \beta_1 = 1.1; \Lambda = 0.95;$

# Chapitre 3

## Modèle épidémiologique d'opiacé amélioré

### 3.1 Introduction

Dans leur modèle, White et Comiskey[13] ont considéré pour l'analyse de la stabilité que la quantité  $\Lambda = \mu s + (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)u_2$  est constante, dans le modèle de Mulone et Brian Straughan [6] cette condition n'est plus imposée, nous allons donc développer [6] dans ce chapitre.

### 3.2 Le modèle mathématique

#### 3.2.1 L'hypothèses de modèle

$$N = S + U_1 + U_2$$

La population est de taille constante à l'intérieur de la période de modélisation, donc on trouve :[6]

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = 0 = \frac{dS}{dt} + \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt}$$

$$\iff \Lambda = \mu s + (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)u_2 \tag{3.1}$$

On reprend le modèle de White et Comiskey :

$$\begin{cases} \dot{S} = (\mu + \delta_1)U_1 + (\mu + \delta_2)U_2 - \frac{\beta_1 U_1 S}{N} \\ \dot{U}_1 = \frac{\beta_1 U_1 S}{N} - pU_1 + \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_1)U_1 \\ \dot{U}_2 = pU_1 - \frac{\beta_3 U_1 U_2}{N} - (\mu + \delta_2)U_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

$N = S + U_1 + U_2$  est constant.

on pose :

$$s = \frac{S}{N}, u_1 = \frac{U_1}{N}, u_2 = \frac{U_2}{N}$$

avec  $s + u_1 + u_2 = 1$

on remplace dans le systèmes (3.2) est on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{s}N = (\mu + \delta_1)u_1N + (\mu + \delta_2)u_2N - \beta_1 u_1 s N \\ \dot{u}_1 N = \beta_1 u_1 s N - p u_1 N + \beta_3 u_1 u_2 N - (\mu + \delta_1)u_1 N \\ \dot{u}_2 N = p u_1 N - \beta_3 u_1 u_2 N - (\mu + \delta_2)u_2 N \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dot{s} = (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)u_2 - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = \beta_1 u_1 s - p u_1 + \beta_3 u_1 u_2 - (\mu + \delta_1)u_1 \\ \dot{u}_2 = p u_1 - \beta_3 u_1 u_2 - (\mu + \delta_2)u_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

On prend

$$u_2 = 1 - s - u_1 \quad (3.4)$$

On considère le système pour  $s$  et  $u_1$ . [7]

On remplace l'équation (3.4) dans le système (3.3) est on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} = (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)(1 - s - u_1) - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = \beta_1 u_1 s - p u_1 + \beta_3 u_1 (1 - s - u_1) - (\mu + \delta_1)u_1 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \dot{s} = (\mu + \delta_1)u_1 + (\mu + \delta_2)(1 - s - u_1) - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = [\beta_3 - p - \mu - \delta_1]u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 \end{cases}$$

On simplifie et on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{s} = (\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)u_1 - (\mu + \delta_2)s - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = [\beta_3 - p - \mu - \delta_1]u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.3 La stabilité locale de l'équilibre sans drogue

L'équilibre sans drogue (Drug Free Equilibrium (DFE)) a pour composantes :

$$s^* = 1, u_1^* = 0$$

la matrices jacobienne de (3.5)

$$J(s, u_1) = \begin{pmatrix} -\beta_1 u_1 - (\mu + \delta_2) & (\mu + \delta_1) - (\mu + \delta_2) - \beta_1 s \\ (\beta_1 - \beta_3)u_1 & (\beta_3 - p - \mu - \delta_1) + (\beta_1 - \beta_3) - 2\beta_3 u_1 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne au point d'équilibre sans drogue est :

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta_2) & (\delta_1 - \delta_2) - \beta_1 \\ 0 & \beta_1 - p - \mu - \delta_1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres :

$$\lambda_1 = -(\mu + \delta_2) < 0$$

$$\lambda_2 = \beta_1 - (p + \mu + \delta_1) < 0 \text{ ssi } \beta_1 < p + \mu + \delta_1 \iff R_0 < 1$$

**Conclusion :**

Le point d'équilibre sans drogue est localement stable si  $R_0 < 1$  est instable si  $R_0 > 1$ .

### 3.4 Équilibre Endémique :

Soit les équations suivantes :

$$(\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)u_1 - (\mu + \delta_2)s - \beta_1 u_1 s = 0 \quad (3.6)$$

$$(\beta_3 - p - \mu - \delta_1)u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 = 0 \quad (3.7)$$

on prend  $0 < \beta_1 < \beta_3$

$$\begin{aligned} (3.7) &\iff (\beta_1 - \beta_3)u_1 s = \beta_3 u_1^2 - (\beta_3 - p - \mu - \delta_1)u_1 \\ &\iff s = \frac{\beta_3}{\beta_3 - \beta_1}u_1 - \frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_1 - \beta_3} \\ &\iff s^* = \frac{-\beta_3}{\beta_3 - \beta_1}u_1^* + \frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_3 - \beta_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

On remplace (3.8) dans (3.6)

$$\begin{aligned} (3.6) &\iff \mu + \delta_2 + (\delta_1 - \delta_2)u_1 - (\mu + \delta_2)\left[\frac{-\beta_3}{\beta_3 - \beta_1}u_1 + \frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right] - \beta_1 u_1 \left[\frac{-\beta_3}{\beta_3 - \beta_1}u_1 + \frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right] = \\ &0 \\ &\iff \frac{\beta_1 \beta_3}{\beta_3 - \beta_1}u_1^2 + \left[(\delta_1 - \delta_2) + \frac{\beta_3(\mu + \delta_2)}{\beta_3 - \beta_1} - \beta_1 \frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right]u_1 + \\ &\quad \left[\mu + \delta_2 - (\mu + \delta_2)\frac{\beta_3 - p - \mu - \delta_1}{\beta_3 - \beta_1}\right] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

On multiplie (3.9) par  $(\beta_3 - \beta_1)$

$$\begin{aligned} (3.9) &\iff \beta_1 \beta_3 u_1^2 + [(\delta_1 - \delta_2)(\beta_3 - \beta_1) + \beta_3(\mu + \delta_2) - \beta_1(\beta_3 - p - \mu - \delta_1)]u_1 + (\mu + \delta_2)(\beta_3 - \beta_1) - (\mu + \delta_2)(\beta_3 - p - \mu - \delta_1) = 0 \\ &\iff \beta_1 \beta_3 u_1^2 + [\beta_1(\delta_2 + p + \mu - \beta_3) + \beta_3(\mu + \delta_1)]u_1 - (\mu + \delta_2)[\beta_1 - (p + \mu + \delta_1)] = 0 \\ &\iff -\beta_1 \beta_3 u_1^2 - [\beta_1(\delta_2 + p + \mu - \beta_3) + \beta_3(\mu + \delta_1)]u_1 + (\mu + \delta_2)[\beta_1 - (p + \mu + \delta_1)] = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

On calcule  $\Delta$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\text{avec } \begin{cases} a = -\beta_1\beta_3 \\ b = -[\beta_1(\delta_2 + p + \mu - \beta_3) + \beta_3(\mu + \delta_1)] \\ c = (\mu + \delta_2)[\beta_1 - (p + \mu + \delta_1)] \end{cases}$$

$$\Delta = [\beta_1(\delta_2 + p + \mu - \beta_3) + \beta_3(\mu + \delta_1)]^2 + 4\beta_1\beta_3(\mu + \delta_2)[\beta_1 - (p + \mu + \delta_1)]$$

$$\Delta > 0 \text{ ssi } \beta_1 > p + \mu + \delta_1 \iff R_0 > 1$$

$$u_1^* = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2\beta_1\beta_3} = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2\beta_1\beta_3} > 0 \text{ car}$$

$$\Delta > 0 \text{ or } \Delta > b^2 \implies \sqrt{\Delta} > |b|$$

le signe de b dépend de  $\beta_3$

$$u_1^{**} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2\beta_1\beta_3} = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2\beta_1\beta_3} < 0 \text{ car } \sqrt{\Delta} > |b|$$

**Conclusion :**

l'unique solution de (3.10) est  $u_1^*$  avec la condition  $R_0 > 1$   
donc l'équilibre endémique est  $(s^*, u_1^*)$ .

### 3.4.1 Système perturbé

Perturbation du système (3.5) au voisinage de l'équilibre  $(s^*, u_1^*)$ .

On pose :  $S = s - s^*$ ;  $U_1 = u_1 - u_1^*$

$$\dot{S} = (\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)(U_1 + u_1^*) - (\mu + \delta_2)(S + s^*) - \beta_1(U_1 + u_1^*)(S + s^*)$$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)U_1 + (\delta_1 - \delta_2)u_1^* - (\mu + \delta_2)S - (\mu + \delta_2)s_1^* - \beta_1U_1(S + s^*) - \beta_1u_1^*(S + s^*) \\ &= [-\beta_1u_1^* - (\mu + \delta_2)]S + [(\delta_1 - \delta_2) - \beta_1s_1^*]U_1 - \beta_1U_1S + [(\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)u_1^* - (\mu + \delta_2)s_1^* - \beta_1u_1^*s_1^*] \end{aligned}$$

$$\text{mais } [(\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)u_1^* - (\mu + \delta_2)s_1^* - \beta_1u_1^*s_1^*] = 0$$

alors

$$\dot{S} = -[\beta_1u_1^* + (\mu + \delta_2)]S + [(\delta_1 - \delta_2) - \beta_1s_1^*]U_1 - \beta_1U_1S$$



d'après (3.6)  $\implies [(\delta_1 - \delta_2) - \beta_1 s^*]U_1^* = (\mu + \delta_2)(s^* - 1)$

$$\iff [(\delta_1 - \delta_2) - \beta_1 s^*] = \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*}$$

alors :

$$\dot{S} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]S + \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*}U_1 - \beta_1 U_1 S$$

$$\dot{U}_1 = (\beta_3 - p - \mu - \delta_1)(U_1 + u_1^*) + (\beta_1 - \beta_3)(U_1 + u_1^*)(S + s^*) - \beta_3(U_1 + u_1^*)^2$$

$$= [(\beta_3 - p - \mu - \delta_1) + (\beta_1 - \beta_3)s^* - 2\beta_3 u_1^*]U_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1^*S + (\beta_1 - \beta_3)U_1 S - \beta_3 U_1^2 + [(\beta_3 - p - \mu - \delta_1)u_1^* + (\beta_1 - \beta_3)s^*u_1^* - \beta_3 u_1^{*2}]$$

$$\text{or } [(\beta_3 - p - \mu - \delta_1)u_1^* + (\beta_1 - \beta_3)s^*u_1^* - \beta_3 u_1^{*2}] = 0$$

$$\implies [(\beta_3 - p - \mu - \delta_1) + (\beta_1 - \beta_3)s^* - \beta_3 u_1^*] = 0$$

donc

$$\dot{U}_1 = -\beta_3 u_1^* U_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1^* S + (\beta_1 - \beta_3)U_1 S - \beta_3 U_1^2$$

**le système perturbé est donné par :**

$$\begin{cases} \dot{S} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]S + \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*}U_1 - \beta_1 U_1 S \\ \dot{U}_1 = -\beta_3 u_1^* U_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1^* S + (\beta_1 - \beta_3)U_1 S - \beta_3 U_1^2 \end{cases} \quad (3.11)$$

**1<sup>re</sup>cas**

On pose

$$H = \frac{(\mu + \delta_2)(1 - s^*)}{u_1^*}; K_1 = (\beta_3 - \beta_1)u_1^*; \beta_3 > \beta_1$$

on remplace dans le système (3.11) est on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]S - H U_1 - \beta_1 U_1 S \\ \dot{U}_1 = -\beta_3 u_1^* U_1 - K_1 S + (\beta_1 - \beta_3)U_1 S - \beta_3 U_1^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

**Linéarisation du système (3.12) au voisinage du point (0,0)**

soit :

$$f(S, U_1) = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]S - HU_1 - \beta_1 U_1 S$$

$$g(S, U_1) = -\beta_3 u_1^* U_1 - K_1 S + (\beta_1 - \beta_3)U_1 S - \beta_3 U_1^2$$

$$\dot{S} = (S - 0)f_S(0, 0) + (U_1 - 0)f_{U_1}(0, 0)$$

$$\dot{S} = S f_S(0, 0) + U_1 f_{U_1}(0, 0)$$

$$\dot{U}_1 = S g_S(0, 0) + U_1 g_{U_1}(0, 0)$$

la matrice jacobienne du système (3.12) :

$$J(S, U_1) = \begin{pmatrix} -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)] - \beta_1 U_1 & -H - \beta_1 S \\ -K_1 + (\beta_1 - \beta_3)U_1 & -\beta_3 u_1^* + (\beta_1 - \beta_3)S - 2\beta_3 U_1 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne au point (0,0) :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)] & -H \\ -K_1 & -\beta_3 u_1^* \end{pmatrix}$$

donc le système linéarisé est :

$$\begin{cases} \dot{S} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]S - HU_1 \\ \dot{U}_1 = -K_1 S - \beta_3 u_1^* U_1 \end{cases} \quad (3.13)$$

**Les valeurs propres de la matrice jacobienne au point (0,0)**

on pose :  $S = e^{\sigma t} \hat{s}; U_1 = e^{\sigma t} \hat{u}_1$

En remplaçant dans le système (3.13) on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma e^{\sigma t} \hat{s} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)]e^{\sigma t} \hat{s} - H e^{\sigma t} \hat{u}_1 \\ \sigma e^{\sigma t} \hat{u}_1 = -K_1 e^{\sigma t} \hat{s} - \beta_3 u_1^* e^{\sigma t} \hat{u}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sigma \hat{s} = -[\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)] \hat{s} - H \hat{u}_1 \\ \sigma \hat{u}_1 = -K_1 \hat{s} - \beta_3 u_1^* \hat{u}_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sigma + [\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)] & H \\ K_1 & \sigma + \beta_3 u_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s} \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{vmatrix} \sigma + [\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)] & H \\ K_1 & \sigma + \beta_3 u_1^* \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (\sigma + [\beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2)])(\sigma + \beta_3 u_1^*) - K_1 H = 0$$

$$\iff \sigma^2 + [\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] \sigma - K_1 H + \beta_3 u_1^* [\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] = 0$$

$$\Delta = [\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2]^2 - 4(\beta_3 u_1^* [\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] - K_1 H)$$

on pose :

$$F = \beta_3 u_1^* [\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] - K_1 H$$

$$F = \beta_3 u_1^* [\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] - (\beta_3 - \beta_1)(\mu + \delta_2)(1 - s^*)$$

$$= \beta_3 u_1^* [\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2] + \beta_1 (\mu + \delta_2)(1 - s^*) - \beta_3 (\mu + \delta_2)(1 - s^*)$$

$$= \beta_1 \beta_3 u_1^{*2} + [\beta_3 u_1^* + \beta_1 (1 - s^*) - \beta_3 (1 - s^*)](\mu + \delta_2)$$

$$= \beta_1 \beta_3 u_1^{*2} + [\beta_3 u_1^* + (\beta_3 - \beta_1) s^* + \beta_1 - \beta_3](\mu + \delta_2)$$

on a

$$(3.6) \iff (\beta_3 - \beta_1) s^* + \beta_3 u_1^* = \beta_3 - p - \mu - \delta_1 \quad (3.14)$$

on remplace (3.14) dans F

$$F = \beta_1 \beta_3 u_1^{*2} + [\beta_1 - p - \mu - \delta_1](\mu + \delta_2)$$

$$F > 0 \text{ ssi } \beta_1 > p + \mu + \delta_1 \iff R_0 > 1$$

on revient à l'équation  $\Delta$

$$\Delta = [\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2]^2 - 4F \text{ avec } F > 0 \text{ si } R_0 > 1$$

$$\implies \Delta > 0 \text{ ssi } [\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2]^2 > 4F$$

$$\sigma = \frac{-[(\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2] \pm [(\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)^2 - 4F]^{1/2}}{2}$$

$$\implies 2\sigma = -[(\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2] \pm [(\beta_3 u_1^* + \beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)^2 - 4F]^{1/2}$$

donc  $\sigma_1, \sigma_2 < 0$  car

$$((\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2)^2 > ((\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2)^2 - 4F \text{ avec } F > 0$$

$$\implies ((\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2) > [((\beta_1 + \beta_3)u_1^* + \mu + \delta_2)^2 - 4F]^{1/2}$$

**conclusion :**

dans le cas  $\beta_3 > \beta_1$  et  $R_0 > 1$

$\sigma_1, \sigma_2 < 0$  donc l'équilibre endémique est stable

**2<sup>eme</sup> cas :**

On pose  $\beta_1 > \beta_3$  avec  $R_0 > 1$

$$(3.6) \iff (\delta_1 - \delta_2)u_1^* - \beta_1 u_1^* s^* = (\mu + \delta_2)(s^* - 1)$$

$$\implies (\delta_1 - \delta_2) - \beta_1 s^* = \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*}$$

**La matrice jacobienne :**

$$J(s^*, u_1^*) = \begin{pmatrix} -\beta_1 u_1^* - (\mu + \delta_2) & (\delta_1 - \delta_2) - \beta_1 s^* \\ (\beta_1 - \beta_3)u_1^* & -\beta_3 u_1^* \end{pmatrix}$$

$$\iff J(s^*, u_1^*) = \begin{pmatrix} -\beta_1 u_1^* - (\mu + \delta_2) & \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*} \\ (\beta_1 - \beta_3)u_1^* & -\beta_3 u_1^* \end{pmatrix}$$

**Les valeurs propres :**

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda + \beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2) & -\frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*} \\ -(\beta_1 - \beta_3)u_1^* & \lambda + \beta_3 u_1^* \end{array} \right| = 0$$

$$\iff (\lambda + \beta_1 u_1^* + (\mu + \delta_2))(\lambda + \beta_3 u_1^*) - (\beta_1 - \beta_3)(\mu + \delta_2)(s^* - 1) = 0$$

$$\iff \lambda^2 + ((\beta_3 + \beta_1)u_1^* + \mu + \delta_2)\lambda + \beta_1\beta_3u_1^{*2} + (\beta_1 - \beta_3)(\mu + \delta_2)(1 - s^*) = 0 \quad (3.15)$$

Puisque tous les coefficients de (3.15) sont positifs, d'après la règle de changement de signe de Descartes il n'ya pas de changement de signe alors il n'existe pas des solutions positives.

donc  $\lambda_1, \lambda_2$  sont réelles négatives ou complexes avec la parties réelles négatives.

on conclut que l'équilibre endémique est L.A.S.

### Conclusion :

Le point d'équilibre endémique est localement asymptotiquement stable dans les deux cas  $\beta_3 > \beta_1$  et  $\beta_3 > \beta_1$ .

## 3.5 La Stabilité Non Linéaire

### 3.5.1 La Stabilité Non Linéaire avec $\beta_3 > \beta_1$

$$\begin{cases} \dot{s} = -(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s - H u_1 - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = -k_1 s - \beta_3 u_1^* u_1 + (\beta_1 - \beta_3) u_1 s - \beta_3 u_1^2 \end{cases} \quad (3.16)$$

on multiplie (3.16)<sub>2</sub> par  $(H/K_1)$  telle que :

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\mu + \delta_2)(1 - s^*)}{u_1^*}; K_1 = (\beta_3 - \beta_1)u_1^* \\ \dot{u}_1 \frac{H}{K_1} &= -Hs - \beta_3 \frac{H}{K_1} u_1^* u_1 + (\beta_1 - \beta_3) \frac{H}{K_1} u_1 s - \beta_3 \frac{H}{K_1} u_1^2 \\ &= -Hs - \beta_3 \frac{H}{K_1} u_1^* u_1 - H \frac{u_1}{u_1^{*2}} s - \beta_3 \frac{H}{K_1} u_1^2 \\ &= -Hs \left(1 + \frac{u_1}{u_1^{*2}}\right) - \beta_3 \frac{H}{K_1} u_1 (u_1^* + u_1) \end{aligned}$$

### 3.5.2 La Stabilité Non Linéaire avec $\beta_1 > \beta_3$

$$\begin{cases} -(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s + \frac{(\mu + \delta_2)(s^* - 1)}{u_1^*} u_1 - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = (\beta_1 - \beta_3)u_1^* s - \beta_3 u_1^* u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

On pose :

$$H = \frac{(\mu + \delta_2)(1 - s^*)}{u_1^*}; K = |\beta_1 - \beta_3|u_1^*; \beta_3 \neq \beta_1$$

$$\iff \begin{cases} \dot{s} = -(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s - H u_1 - \beta_1 u_1 s \\ \dot{u}_1 = K s - \beta_3 u_1^* u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$V_1 = \frac{K s^2 + H u_1^2}{2}$$

$$V_1(1, 0) = 0$$

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial s} + \frac{\partial V_1}{\partial u_1} = K s \dot{s} + H u_1 \dot{u}_1$$

$$= K s [ -(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s - H u_1 - \beta_1 u_1 s ] + H u_1 [ K s - \beta_3 u_1^* u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 ]$$

$$= -K(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s^2 - K H s u_1 - K \beta_1 u_1 s^2 + H K s u_1 - \beta_3 H u_1^* u_1^2 + H(\beta_1 - \beta_3)s u_1^2 - H \beta_3 u_1^3$$

$$= -K(\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s^2 - K \beta_1 u_1 s^2 - \beta_3 H u_1^* u_1^2 + H(\beta_1 - \beta_3)s u_1^2 - H \beta_3 u_1^3$$

$$= -K(\beta_1 - \beta_3)u_1^* (\beta_1 u_1^* + \mu + \delta_2)s^2 - u_1^* u_1 s^2 (\beta_1 - \beta_3) - \beta_3 \frac{(\mu + \delta_2)(1 - s^*)}{u_1^*} u_1^2 (u_1^* + u_1) + \frac{(\mu + \delta_2)(1 - s^*)}{u_1^*} (\beta_1 - \beta_3) s u_1^2$$

## 3.6 La stabilité Globale

### 3.6.1 Application de la théorie de Poincaré Bendixson

$$\text{Soit : } T = \{ (s, u_1) : s \geq 0; u_1 \geq 0; s + u_1 \leq 1 \}$$

On admettra que T est positivement invariant

**Le Critère De Dulac :**

$$\text{Soit : } B(s, u_1) = \frac{1}{u_1}$$

$$\begin{cases} \dot{s} = (\mu + \delta_2) + (\delta_1 - \delta_2)u_1 - (\mu + \delta_2)s - \beta_1 u_1 s = f(s, u_1) \\ \dot{u}_1 = [\beta_3 - p - \mu - \delta_1]u_1 + (\beta_1 - \beta_3)u_1 s - \beta_3 u_1^2 = g(s, u_1) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$Bf(s, u_1) = \frac{(\mu + \delta_2)}{u_1} + (\delta_1 - \delta_2) - (\mu + \delta_2)\frac{s}{u_1} - \beta_1 s$$

$$Bg(s, u_1) = (\beta_3 - p - \mu - \delta_1) + (\beta_1 - \beta_3)s - \beta_3 u_1$$

$$\frac{\partial Bf(s, u_1)}{\partial s} = -\frac{(\mu + \delta_2)}{u_1} - \beta_1$$

$$\frac{\partial Bg(s, u_1)}{u_1} = -\beta_3$$

$$\text{div}(Bf, Bg) = -\frac{(\mu + \delta_2)}{u_1} - \beta_1 - \beta_3 < 0$$

d'après le critère de Dulac il n'ya pas de cycle limite dans  $T$ , et à partir de Théorème de Poincaré Bendixson la solution va tend vers un point d'équilibre, si  $R_0 > 1$  le point d'équilibre  $(1,0)$  instable, donc les trajectoires vont converger vers le point d'équilibre  $(s^*, u_1^*)$ , alors pour  $R_0 > 1$  le point d'équilibre  $(s^*, u_1^*)$  est G.A.S. Si  $R_0 < 1$  le point d'équilibre  $(s^*, u_1^*)$  instable alors les trajectoires vont converger vers le point d'équilibre  $(1,0)$ , donc le point d'équilibre  $(1,0)$  est Globalement asymptotiquement stable (G.A.S) si  $R_0 < 1$ .

### 3.7 Simulation Numérique

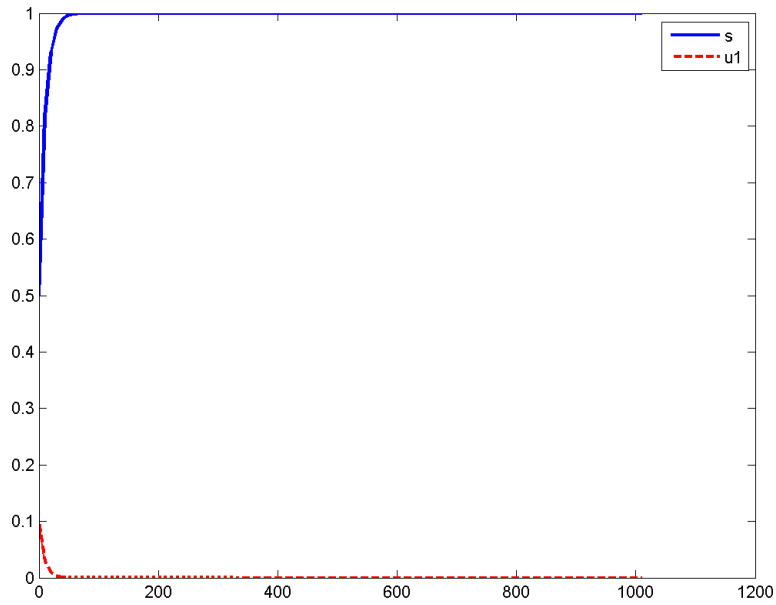


FIGURE 3.1 – simulation numérique pour  $R_0 < 1$  avec ces paramètres  
 $\mu = 0.1; N = 1; \beta_3 = 0.02; \delta_2 = 0.01; p = 0.1; \delta_1 = 0.01; \beta_1 = 0.1;$



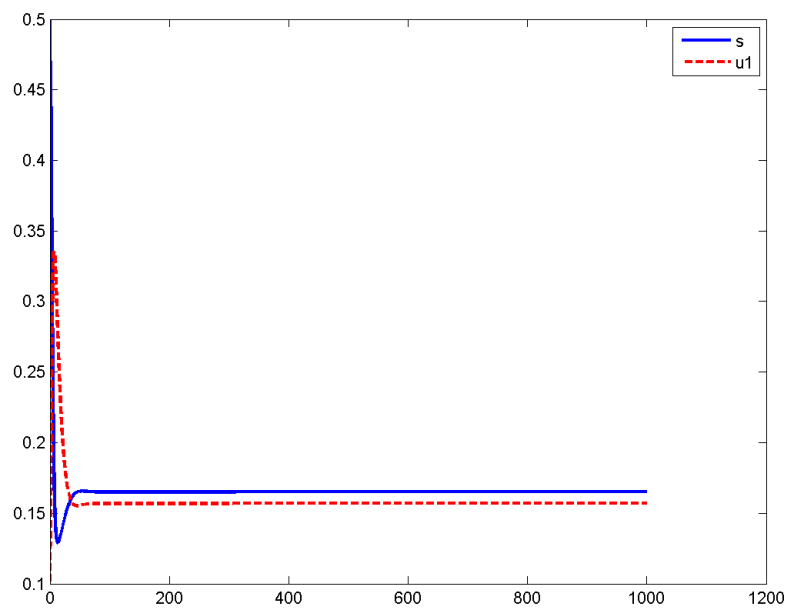


FIGURE 3.2 – simulation numérique pour  $R_0 < 1$  avec ces paramètres  
 $\mu = 0.01$ ;  $N = 1$ ;  $\beta_3 = 0.02$ ;  $\delta_2 = 0.01$ ;  $p = 0.1$ ;  $\delta_1 = 0.1$ ;  $\beta_1 = 1.19$ ;

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons effectué des calculs de stabilité (locale et / ou globale), des points d'équilibre pour deux modèles épidémiologique dans une population ouverte. Dans le premier chapitre, l'existence d'un point d'équilibre sans drogue est L.A.S si  $R_0 < 1$ . A partir de la bifurcation backward, on a l'existence de l'équilibre endémique, autrement dit, d'après la règle de signe de Descartes si  $R_0 > \mu \frac{N}{\Lambda}$ ; soit il existe une solution unique, soit il n'existe pas, et si  $R_0 < \mu \frac{N}{\Lambda}$ , deux cas s'imposent. Le premier cas est si  $\beta_1 \beta_3 \Lambda - (\beta_3 (\mu + \delta_1) \mu N + N (\mu + \delta_2) (p + \mu + \delta_1) \beta_1) < 0$ , il n'y a pas de point d'équilibre. Le deuxième cas, par contre, c'est l'existence de deux points d'équilibres endémiques. Cette équilibre endémique est L.A.S. Le chapitre qui suit étudie le même modèle du premier chapitre dont la population est constante, sauf que  $R_0 < 1$ , ce qui mène a déduire que l'existence de l'équilibre sans drogues est leur stabilité locale et globale. Si  $R_0 > 1$ , l'existence d'un seul point d'équilibre endémique est cette stabilité locale et globale. Les travaux développés ici on été récemment généralisés dans le cadre d'un modèle structuré en âge dans [?].



# Table des figures

2.1	le diagramme pour le modèle 1 . . . . .	9
2.2	simulation numérique pour $R_0 < 1$ avec ces paramètres . . . . .	27
2.3	simulation numérique pour $R_0 > 1$ 1 <sup>er</sup> cas $R_0 > \mu \frac{N}{\Lambda}$ avec ces paramètres . . . . .	28
2.4	simulation numérique pour $R_0 > 1$ 2 <sup>eme</sup> cas $R_0 < \mu \frac{N}{\Lambda}$ avec ces paramètres . . . . .	28
3.1	simulation numérique pour $R_0 < 1$ avec ces paramètres . . . . .	41
3.2	simulation numérique pour $R_0 < 1$ avec ces paramètres . . . . .	42



# Bibliographie

- [1] Leon Arriola and James M. Hyman. Sensitivity analysis for uncertainty quantification in mathematical models. *Mathematical and Statistical Estimation Approaches in Epidemiology*, 2009.
- [2] Scott E. Brodie. Descartes' rule of signs. <<https://fr.wikipedia.org/wiki/RDescartes>>, 1 January 1999.
- [3] Carlos Castillo-Chavez. Dynamical models of tuberculosis and their applications. *MATHEMATICAL BIOSCIENCES AND ENGINEERING*, September 2004.
- [4] Su Francis E et al. Descartes rule of signs. *Math Fun Facts* <<http://www.math.hmc.edu/funfacts>>.
- [5] Hugo Falconet et Antoine Jego. Modéliser la propagation d'une épidémie. Juin 2015.
- [6] Brian Straughan Giuseppe Mulone. A note on heroin epidemics. *mathematical biosciences*, 218 :138–141, 6 February 2009.
- [7] Herbert W. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 42 :599–653, 4 novembre 2000.
- [8] J.BRICMONT. Introduction à la dynamique non linéaire. <[https://cdn.uclouvain.be/public/Exports/20reddot/math/documents/GLOBAL\\_2111.pdf](https://cdn.uclouvain.be/public/Exports/20reddot/math/documents/GLOBAL_2111.pdf)>, 2010.
- [9] L.A.P.Heestereek. A brief history of  $r_0$  and arecipe for its calculation. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 50 : 189–204 :189–204, 27 novembre 2002.
- [10] James Watmough P. van den Driessche. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180 :29–48, 2002.
- [11] Jean-Christophe Poggiale Pierre Auger, Christophe Lett. *MODÉLISATION MATHÉMATIQUE EN ÉCOLOGIE*. Master Écoles d'ingénieurs, août 2015.
- [12] SWARNALI SHARMA and G. P. SAMANTA. Dynamical behaviour of a drinking epidemic model. *Journal of applied mathematics,informatics*, 4 January 2013.
- [13] Emma white and catherine comiskey. heroin epidemics,treatment and ode modelling. *mathematical biosciences*, 208(312-324) :312–324, 7 novembre 2006.

**Résumés** Nous traitons dans cette mémoire deux modèles épidémiologiques dans le cas de l'équation différentielle ordinaire, et on a analysé l'existence des états d'équilibres et leurs stabilité (locale ou globale) et la bifurcation backward, et la sensibilité du paramètre  $R_0$ , et on a utilisé la simulation numérique pour illustrer les résultats obtenus.

**Abstract** We treat in this memory two epidemiological models in the case of the ordinary differential equation, and the existence of equilibrium states and their stability (local or global) and the backward bifurcation, and the sensitivity of the parameter  $R_0$ , and we analyzed use numerical simulation to illustrate the results obtained.