Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2019-2020
Master I
Probabilités-Statistiques

Examen final

***Exercice1** : (07 pts)*

Une entreprise produit des bobines de fil électrique, la longueur (en mètres) d'une bobine est une variable aléatoire X qui suit la loi normale N(50; 0,2)

1. *On choisit une bobine au hasard, calculer les probabilités suivantes*
   a. *la longueur de la bobine est inférieure 50,19m*
   b. *la longueur de la bobine est supérieure 50,16m*
   c. *la longueur de la bobine est comprise entre 50,16m et 50,19m*
2. *Déterminer la nombre réel positif a tel que P(50 – a ≤ X ≤ 50 + a) = 0, 9*
   Interpréter le résultat trouvé.

***Exercice 2** : (07 pts)*

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 3 \\ \frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\beta+1} & si\, x \geq 3 \end{cases}$$

où α et β sont deux paramètres réels strictement positifs.

1. *Sous quelle(s) condition(s) sur les paramètres, f est-elle la densité de probabilité (d.d.p) d'une variable aléatoire X ?*
2. *Lorsque f est une d.d.p calculer :*
   a. *E(X) (l'espérance)*
   b. *V(X) (la variance)*

***Exercice 3** : (06 pts)*

La d.d.p d'un couple de variables aléatoires est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda e^{-(2x+3y)} & x > 0\, et\, y > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. *Trouver λ.*
2. *Calculer les densités marginales*
3. *Calculer Cov(X,Y)*

Examen Probabilité - Statistiques M1.GI.

Corrigé-type.

Ex1: X suit une loi $N(50,\ 0{,}2)$.

1. a. $P(X \leq 50{,}19) = P\left(\frac{X-50}{0{,}2} \leq \frac{50{,}19-50}{0{,}2}\right) = P\left(\frac{X-50}{0{,}2} \leq 0{,}95\right)$

$= F(0{,}95)$ (F la fonction de répartition de $N(0,1)$)

(de la table $N(0,1)$) $= 0{,}8289$. (1pt)

b. $P(X \geq 50{,}16) = 1 - P(X \leq 50{,}16) = 1 - P\left(\frac{X-50}{0{,}2} \leq \frac{50{,}16-50}{0{,}2}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-50}{0{,}2} \leq 0{,}8\right) = 1 - F(0{,}8)$

(de la table $N(0,1)$) $= 1 - 0{,}7881$ (1pt)

$= 0{,}2119$.

c. $P(50{,}16 \leq X \leq 50{,}19) = P\left(\frac{50{,}16-50}{0{,}2} \leq \frac{X-50}{0{,}2} \leq \frac{50{,}19-50}{0{,}2}\right)$.

$= P\left(0{,}8 \leq \frac{X-50}{0{,}2} \leq 0{,}95\right)$

$= F(0{,}95) - F(0{,}8)$

$= 0{,}8289 - 0{,}7881$ (1pt)

$= 0{,}0408$

2. $P(50-a \leq X \leq 50+a) = P\left(\frac{-a}{0{,}2} \leq \frac{X-50}{0{,}2} \leq \frac{a}{0{,}2}\right) = F\left(\frac{a}{0{,}2}\right) - F\left(\frac{-a}{0{,}2}\right)$

$= F\left(\frac{a}{0{,}2}\right) - \left(1 - F\left(\frac{a}{0{,}2}\right)\right) = 2F\left(\frac{a}{0{,}2}\right) - 1 = 0{,}9$

Donc $F\left(\frac{a}{0{,}2}\right) = 0{,}95 \underset{\text{de la table } N(0,1)}{\Longrightarrow} \frac{a}{0{,}2} = 1{,}65 \Longrightarrow a = 0{,}33$

(on acceptera aussi 1,64) (2pts)

$a = 0{,}33$

interprétation : 90% des bobines fabriquées par cette usine ont une longueur appartenant à l'intervalle $[50-0{,}33,\ 50+0{,}33]$ soit $[49{,}67\ ,\ 50{,}33]$. (2pts)

Exercice 2 :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\beta+1} & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$

1/ f est une d.d.p ssi $f(x) \geqslant 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

f est par définition positive $f \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{+\infty} \frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\beta+1} dx = \alpha\cdot 3^{\beta}\int_{3}^{+\infty} x^{-\beta-1}\,dx = \alpha 3^{\beta}\left[\frac{x^{-\beta}}{-\beta}\right]_{3}^{+\infty}$$

$$= \alpha 3^{\beta}\left(0 - \frac{3^{-\beta}}{-\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$$

pour que f soit une d.d.p $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 1 \Rightarrow \alpha = \beta$.

Donc $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ \frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ est une d.d.p

(01pt)

2./a. $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$$E(x) = \int_{3}^{+\infty} x\cdot\frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha\cdot 3^{\alpha}\int_{3}^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \alpha\cdot 3^{\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{3}^{+\infty} \text{ ou } \alpha 3^{\alpha}\left[\ln x\right]_{3}^{+\infty} \text{ si } \alpha = 1.$$

1^er cas si $\alpha \leq 1$ l'intégrale diverge $E(x)$ n'existe pas

(On acceptera aussi la réponse $E(x) = \infty$)

(02pts)

2ème cas : si $\alpha > 1$.

$$E(x) = \alpha 3^{\alpha}\left(0 - \frac{3^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \frac{3\alpha}{\alpha - 1}.$$

$E(x) = \frac{3\alpha}{\alpha-1}$ quand $\alpha > 1$.

(1pt)

b./ $V(X) = E\left[(X-E(X))^2\right] = E(X^2) - (E(X))^2$

quand $E(X)$ n'existe pas $V(X)$ n'existe pas aussi, on supposera donc que $\alpha > 1$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_3^{+\infty} x^2 \frac{\alpha}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\alpha+1} dx = \alpha 3^{\alpha} \int_3^{+\infty} x^{-\alpha+1}\, dx$$

$$= \alpha 3^{\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right]_3^{+\infty} \text{ ou } 2\times 3^2 \left[\ln x\right]_3^{+\infty} \quad (\text{si } \alpha = +2).$$

<u>1^er cas</u> : Si $\alpha \leq 2$ $V(X)$ n'existe pas. (l'intégrale diverge)

(On acceptera aussi $V(X) = +\infty$.) (2pts)

<u>2ème cas</u> : Si $\alpha > 2$

$$E(X^2) = \alpha 3^{\alpha}\left(0 - \frac{3^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right) = \frac{\alpha 3^2}{\alpha - 2}.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha 3^2}{\alpha-2} - \left(\frac{3\alpha}{\alpha-1}\right)^2 = \alpha 3^2 \cdot \left[\frac{(\alpha-1)^2 - \alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}\right]$$

$$= \alpha \cdot 3^2 \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha \cdot 3^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$

$$V(X) = \frac{9\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$ (1pt)

Ex 3 $\quad f(x,y) = \begin{cases} \lambda e^{-(2x+3y)} & x>0 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Attention f n'est pas symétrique $f(x,y) \neq f(y,x)$.

1. $f \geq 0 \Longrightarrow \lambda \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \lambda \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(2x+3y)}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \lambda \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx \int_0^{+\infty} e^{-3y}\,dy = 1.$$

$$\Longrightarrow \lambda \left[-\tfrac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \left[-\tfrac{1}{3} e^{-3y}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\Longrightarrow \lambda \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} = 1 \Longrightarrow \lambda = 6.$$

$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \qquad \lambda = 6$

1,5 pt

2. $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 6\int_0^{+\infty} e^{-(2x+3y)}\,dy = 6e^{-2x}\left[-\tfrac{1}{3}e^{-3y}\right]_0^{+\infty} = 2e^{-2x}.$$

$f_X(x) = 2e^{-2x}$ si $x>0$ et 0 ailleurs.

1,5 pt

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 6\int_0^{+\infty} e^{-(2x+3y)}\,dx = 6e^{-3y}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = 3e^{-3y}$$

$f_Y(y) = 3e^{-3y}$ si $y>0$ et 0 ailleurs

1,5 pt

3. On remarque que $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)} & \text{si } x>0, y>0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

Donc X et Y sont indépendantes et par suite :

$$Cov(X,Y) = 0.$$

1,5 pt

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990