Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2019-2020
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (04 pts)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R} - \{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{7x-3}{x-5}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

Exercice2 : (10 pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice A est-elle inversible ?
2. Lorsque cela est possible calculer A^{-1}
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a on a l'égalité $A^2 = A$.

Exercice3 : (06 pts)

Montrer par récurrence que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} < \left(1 - \frac{1}{(1+n)^2}\right)$$

Examen final Algèbre

Corrigé type.

Exercice 1 : $f : \mathbb{R}-\{5\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \dfrac{7x-3}{x-5}$.

1/ Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{5\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \frac{7x_1-3}{x_1-5} = \frac{7x_2-3}{x_2-5} \Longrightarrow (x_2-5)(7x_1-3) = (x_1-5)(7x_2-3)$$

$$\Longrightarrow 7x_1x_2 - 3x_2 - 35x_1 + 15 = 7x_1x_2 - 3x_1 - 35x_2 + 15$$

$$\Longrightarrow 32x_2 = 32x_1 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Donc f est injective

02pts

2/ Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$y = f(x) \Longrightarrow y = \frac{7x-3}{x-5} \Longrightarrow (x-5)y = 7x-3 \Longrightarrow xy - 5y = 7x-3$$

$$\Longrightarrow xy - 7x = 5y-3 \Longrightarrow x(y-7) = 5y-3$$

si $y \neq 7$ on a $x = \dfrac{5y-3}{y-7}$.

mais si $y = 7$ alors $y = f(x) \Rightarrow 7 = f(x) \Rightarrow 7 = \dfrac{7x-3}{x-5}$

$$\Rightarrow 7x - 35 = 7x - 3$$

$$\Rightarrow -35 = -3 \quad \text{impossible}$$

Donc $y = 7$ ne possède pas d'antécédent par f dans $\mathbb{R}-\{5\}$.

ou encore l'équation $7 = f(x)$ ne possède pas de solution

Donc en conclusion f n'est pas surjective.

02pts

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

1°/ $\det A = (1-2a)\left[(1-2a)^2 - a^2\right] - a\left[a(1-2a) - a^2\right] + a\left[a^2 - a(1-2a)\right]$

$= (1-2a)\left[(1-2a+a)(1-2a\cancel{+a})\right] - a^2\left[1-2a-a\right] + a^2\left[a-1+2a\right]$

$= (1-3a)\left[(1-2a)(1-a) - a^2 - a^2\right] = (1-3a)(1-3a) = (1-3a)^2$

$\det A = (1-3a)^2$

A est inversible $\Longleftrightarrow a \neq 1/3$.

03pts

2°/ $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}(A)$, après calcul on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2a}{3a-1} & \dfrac{a}{3a-1} & \dfrac{a}{3a-1} \\ \dfrac{a}{3a-1} & 1 - \dfrac{2a}{3a-1} & \dfrac{a}{3a-1} \\ \dfrac{a}{3a-1} & \dfrac{a}{3a-1} & 1 - \dfrac{2a}{3a-1} \end{pmatrix}$$

04pts

3°/ $A^2 = A$; il suffit de calculer un seul élément du produit A^2 et l'identifier avec le coefficient correspondant de A ; puis vérifier le résultat. En effet l'élément de la première ligne pemière colonne de A^2 est

$(1-2a)(1-2a) + a^2 + a^2 = (1-2a) \Longleftrightarrow 1 + 6a^2 - 4a = 1-2a$

$\Longleftrightarrow 6a^2 - 2a = 0 \Longleftrightarrow a(6a-2) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $a = 1/3$.

En effet $a = 0 \Rightarrow A = I$ et on a bien $A^2 = A = I$.

$a = 1/3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et on a bien $A^2 = A$.

03pts

Donc $a = 0$ ou $a = \dfrac{1}{3}$ pour avoir $A^2 = A$

Exercice 3 : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} < \left(1 - \frac{1}{(1+n)^2}\right)$

- Pour $n = 2$ $\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{8}$ et $1 - \frac{1}{(1+2)^2} = \frac{8}{9}$.

et on a bien $\frac{1}{8} < \frac{8}{9}$ Donc l'inégalité est vérifiée pour $n=2$.

1pt

- Supposons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} < \left(1 - \frac{1}{(1+n)^2}\right)$ Hypothèse de Récurrence. H.R.

- Il faut montrer que $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3} < \left(1 - \frac{1}{(2+n)^2}\right)$

En effet : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < 1 - \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}$ (H.R).

Calculons alors la différence :

$$\left(1 - \frac{1}{(2+n)^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) = -\frac{1}{(2+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^2} - \frac{1}{(n+1)^3}.$$

$$= \frac{-(1+n)^3 + (1+n)(2+n)^2 - (2+n)^2}{(2+n)^2(n+1)^3} = \frac{n^2+n-1}{(n+2)^2(n+1)^3}$$

Comme $n \geqslant 2$ $n^2+n-1 > 0$ donc $\frac{n^2+n-1}{(n+2)^2(n+1)^3} > 0$.

ainsi $1 - \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} < 1 - \frac{1}{(2+n)^2}$.

et donc $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^3} < \left(1 - \frac{1}{(2+n)^2}\right)$ cqfd.

05pts