Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2018-2019
Master I
Probabilités-Statistiques

# Examen final

**Exercice1 : (06pts)** Une usine fabrique des appareils électroménagers, dont 5% sont défectueux. On dispose en sortie d'usine d'un testeur électronique qui allume un voyant vert si l'appareil est fonctionnel et un voyant rouge si l'appareil est défectueux.

Si l'appareil est fonctionnel, le testeur est fiable avec la probabilité 0.96, et si l'appareil est défectueux, le testeur est fiable avec la probabilité 0.98.

On effectue un test sur un appareil au hasard:

1. Quel est la probabilité que le testeur donne un faux résultat?
2. Quelle est la probabilité qu'un appareil ayant obtenu un voyant vert, soit défectueux ?

**Exercice 2 : (07 pts)**

I. Dans une récolte de tomates ; le poids noté X suit une loi normale d'espérance 160 grammes, et d'écart-type 5 grammes.

1. On choisit une tomate au hasard, calculer la probabilité que son poids dépasse 170 grammes.
2. On choisit une tomate au hasard, calculer la probabilité que son poids soit compris entre 150 et 157 grammes.
3. Donner le poids maximal des 15% des tomates les plus petites.

**Exercice 3 : (07 pts)**

La d.d.p d'un couple de variables aléatoires est donnée par

$$f(x,y) = \frac{\alpha}{1 + 4x^2 + 9y^2 + 36x^2y^2} \qquad x \in \mathbb{R} \; et \; y \in \mathbb{R}$$

1. Trouver $\alpha$.
2. Calculer les densités marginales
3. Calculer Cov(X,Y)

# Corrigé Examen final
## Proba-Stat M1.

**Exercice 1 :** On propose les notations :

F : { le testeur donne un résultat erroné (faux) }

D : { l'appareil électroménager est défectueux }

R : { Voyant rouge allumé }.

V : { Voyant vert allumé }.

1. Le test est erroné dans deux cas de figure
   - Voyant vert allumé et l'appareil électroménager est défectueux

   ou

   - Voyant rouge allumé et l'appareil électroménager n'est pas défectueux

Donc $F = (V \cap D) \cup (R \cap \bar{D})$

Remarquons que : $(V \cap D) \cap (R \cap \bar{D}) = \phi$

Donc
$$\begin{aligned} P(F) &= P(V \cap D) + P(R \cap \bar{D}) \\ &= P(V/D) \cdot P(D) + P(R/\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) \\ &= (1-0,98) \cdot 0,05 + (1-0,96) \cdot (1-0,05) \\ &= 0,039 \end{aligned}$$

3pts

2. On cherche $P(D/V)$ ; On utilise alors la formule de Bayes :

$$P(D/V) = \frac{P(V/D) \cdot P(D)}{P(V/D) \cdot P(D) + P(\bar{D}) \cdot P(V/\bar{D})}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,02}{0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,96}$$

$$= 0,001.$$

3pts

Exercice 2 : $X$ suit une loi normale $N(160\ ,\ 5)$

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{170-160}{5}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq 2\right) = 1 - F(2) = 1 - 0,9772$ → de la table $N(0,1)$

$= 0,022.$

2pts

2/ $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-160}{5} \leq \frac{X-160}{5} \leq \frac{157-160}{5}\right)$

$= P\left(-2 \leq \frac{X-160}{5} \leq -0,6\right)$

$= F(-0,6) - F(-2) = 1 - F(0,6) - (1 - F(2))$

$= F(2) - F(0,6)$

$= 0,9772 - 0,7257$ (de la table $N(0,1)$)

$= 0,2515.$

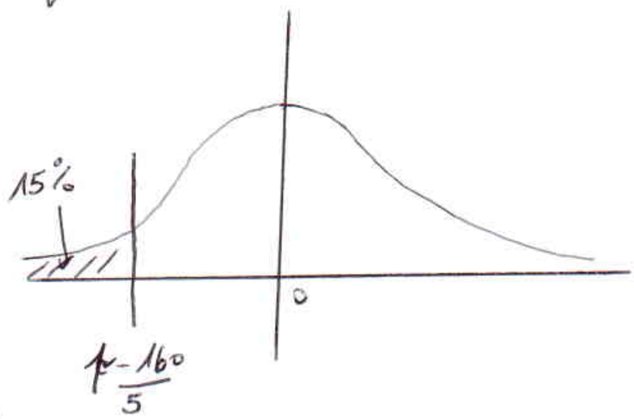
2pts

3/ On cherche le poids $p$ tel que $P(X \leq p) = 15\% = 0,15$

Donc $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{p-160}{5}\right) = 0,15$

$\frac{p-160}{5}$ est nécessairement négatif

car $0,15 < 0,5$




Donc $1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-p}{5}\right) = 0,15$

par suite $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-p}{5}\right) = 1 - 0,15 = 0,85.$

En utilisant la table de $N(0,1)$ de façon inverse ; on trouve que

$\frac{160-p}{5} = 1,04 \Rightarrow p = 160 - 1,04 \times 5$

$\Rightarrow p = 154,8$ grammes

$\Rightarrow p \approx 155$ grammes

(on acceptera ces deux valeurs)

3pts

Ex3 :

La ddp du couple $(X,Y)$ est donnée par :

$$f(x,y) = \frac{\alpha}{1+4x^2+9y^2+36x^2y^2} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1/ Il est nécessaire d'avoir $\alpha > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{1+4x^2+9y^2+36x^2y^2}\,dx\,dy = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+4x^2)(1+9y^2)}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+9y^2}\,dy = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x\right]_{-\infty}^{+\infty} \cdot \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3y\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = 6/\pi^2 \qquad \text{Donc } f(x,y) = \frac{6/\pi^2}{1+4x^2+9y^2+36x^2y^2} = \frac{6/\pi^2}{(1+4x^2)(1+9y^2)}$$

3 pts

2/ Densités marginales :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = 6/\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+4x^2)(1+9y^2)}\,dy = 6/\pi^2 \cdot \frac{1}{1+4x^2}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3y\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f_X(x) = 2/\pi \frac{1}{1+4x^2} = 2/\pi \frac{1}{1+4x^2}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 6/\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+4x^2)(1+9y^2)}\,dx = 6/\pi^2 \frac{1}{1+9y^2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$f_Y(y) = 3/\pi \frac{1}{1+9y^2}$$

3 pts

3/ On observe que $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Donc $X$ et $Y$ sont indépendants.

Ainsi $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.

1 pt