Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2018-2019
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (06pts)

I. Soit l'application
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 4x + 2$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(-4)$, que pouvez-vous en conclure?
2. Résoudre l'équation $f(x) = -5$, que pouvez-vous en conclure?

II. Soit l'application
$$g :]-\infty, -2[\longrightarrow]-2, +\infty[$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2 + 4x + 2$$

1. Montrer que g est bijective.
2. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$.

Exercice2 : (08pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux paramètres réels.

1. Pour quelles valeurs de a et de b la matrice A est-elle inversible ?
2. Lorsque cela est possible calculer A^{-1}.
3. Déduire de ce qui précède, la solution du système

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

Exercice3 : (06pts)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner en fonction de n, l'expression de

$$\sum_{k=1}^{n} M^k$$

puis démontrer votre résultat par récurrence.

Corrigé examen final

Algèbre

Exercice 1: I. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2+4x+2$.

1/ $f(0) = 2$; $f(-4) = 2$, ainsi $f(0) = f(-4)$ mais $0 \neq -4$

f n'est pas injective. (1pt)

2/ $f(x) = -5 \Rightarrow x^2+4x+2 = -5 \Rightarrow x^2+4x+7 = 0$

$\Delta = -12 < 0$, $f(x) = -5$ n'a pas de solution réelle

Donc $y = -5$ n'a pas d'antécédent par f

f n'est pas surjective. (1pt)

II. $g :]-\infty, -2[\longrightarrow]-2, +\infty[$, $g(x) = x^2+4x+2$.

1 • Injective: Soient $x_1, x_2 \in]-\infty, -2[$ ($x_1 < -2$ et $x_2 < -2$)

$g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow x_1^2+4x_1+2 = x_2^2+4x_2+2 \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 + x_2 + 4 = 0$

Or $(x_1 < -2$ et $x_2 < -2) \Rightarrow x_1 + x_2 < -4 \Rightarrow x_1 + x_2 + 4 < 0$

Donc $x_1 + x_2 + 4 = 0$ ne peut pas avoir lieu (c'est rejeté).

Donc $x_1 = x_2$ et par suite g est injective. (1,5pt)

• Surjective: Soit $y \in]-2, +\infty[$. ($y > -2$)

$y = g(x) \Longrightarrow x^2+4x+2-y = 0$ $\Delta = 16 - 4(2-y) = 8+4y = 4(2+y)$

Comme $y > -2 \Longrightarrow \Delta > 0$ Donc l'équation $y = g(x)$ possède une solution réelle mais cela ne suffit pas pour dire que g est surjective il reste à montrer qu'au moins une solution appartient à l'ensemble de départ

$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{4(2+y)}}{2} = -2 - \sqrt{2+y} < -2$; $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{4(2+y)}}{2} = -2 + \sqrt{2+y} > -2$ refusé

Donc $\forall y \in]-2, +\infty[$, $\exists x = (-2 - \sqrt{2+y}) \in]-\infty, -2[$; tel que $y = g(x)$

g est surjective. (1,5pt)

2. D'après ce qui précède g est bijective et g^{-1} existe :

$g^{-1} :]-2, +\infty[\longrightarrow]-\infty, -2[$

$x \longmapsto g^{-1}(x) = -2 - \sqrt{2+x}$ (1pt)

Exercice 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

1/ $\det A = a \begin{vmatrix} ab & 1 \\ b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & ab \\ 1 & b \end{vmatrix} = a(a^2b - b) - b(a-1) + (b - ab)$

$= ab(a-1)(a+1) + b(a-1) + b(1-a) = (a-1)\left[ab(a+1) + b - b\right]$

$= b(a-1)(a^2+a-2) = b(a-1)(a-1)(a+2)$

$\det A = b(a-1)^2(a+2)$ ——— 02pts

$\det A = 0 \iff b = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -2$.

A est inversible $\iff \det A \neq 0 \iff b \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -2$ ——— 1pt

2/ On suppose que $\det A \neq 0$ donc A^{-1} existe.

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} b(a^2-1) & (1-a) & b(1-a) \\ b(1-a) & (a^2-1) & b(1-a) \\ b(1-a) & (1-a) & b(a^2-1) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{b(a-1)^2(a+2)} \begin{pmatrix} b(a^2-1) & b(1-a) & b(1-a) \\ (1-a) & (a^2-1) & (1-a) \\ b(1-a) & b(1-a) & b(a^2-1) \end{pmatrix}$$ ——— 3pts

3/ $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - y + 2z = 8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

En posant dans la matrice A, $a = 2$ et $b = -1$. on a alors.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = 6 \end{cases}$ ——— 02pts

Exercice 3 : $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$M^2=M.M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$M^3=M.M^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

⋮

On "devine" alors que $M^k=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; démontrons-le par récurrence.

$k=1$, $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ c'est vérifié

On suppose que $M^k=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; il faut montrer que $M^{k+1}=\begin{pmatrix}1&0&k+1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$M^{k+1}=M^k.M=\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&(k+1)\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ cqfd.

Ainsi $$\sum_{k=1}^{n}M^k=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n&0&\sum_{k=1}^{n}k\\0&n&0\\0&0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n&0&\frac{n(n+1)}{2}\\0&n&0\\0&0&n\end{pmatrix}$$

3pts

Démontrons ce résultat par récurrence.

pour $n=1$. $$\sum_{k=1}^{1}M^k=M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1\times2}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ formule vérifiée.

On suppose que $$\sum_{k=1}^{n}M^k=\begin{pmatrix}n&0&\frac{n(n+1)}{2}\\0&n&0\\0&0&n\end{pmatrix}$$ (HR)

il faut m.q $$\sum_{k=1}^{n+1}M^k=\begin{pmatrix}(n+1)&0&\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\0&(n+1)&0\\0&0&(n+1)\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}M^k=\sum_{k=1}^{n}M^k+M^{n+1}=\begin{pmatrix}n&0&\frac{n(n+1)}{2}\\0&n&0\\0&0&n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&(n+1)\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}n+1&0&\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\0&n+1&0\\0&0&n+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1&0&\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\0&n+1&0\\0&0&n+1\end{pmatrix}$$ cqfd.

3pts