Sujet et corrigé de l'examen final

Probabilités-Statistiques

GI 722

La consultation des copies aura lieu (Inchallah)

le Jeudi 25 janvier à partir de 14h00 au bloc C

Le responsable de la matière

Miri. S

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques

Examen Final

***Exercice1 :** (06pts)* *Une usine fabrique des appareils électroménagers, dont 5% sont défectueux. On dispose en sortie d'usine d'un testeur électronique qui allume un voyant vert si l'appareil est fonctionnel et un voyant rouge si l'appareil est défectueux.*

Si l'appareil est fonctionnel, le testeur est fiable avec la probabilité 0.96, et si l'appareil est défectueux, le testeur est fiable avec la probabilité 0.98.

On effectue un test sur un appareil au hasard:

1. *Quel est la probabilité que le testeur donne un faux résultat?*
2. *Quelle est la probabilité qu'un appareil ayant obtenu un voyant vert, soit défectueux ?*

***Exercice 2 :** (06 pts)* *Une machine produit des articles dont 3% sont défectueux.*

I. Calculer la probabilité que parmi 112 articles produits il y ait :

1. *Deux articles défectueux.*
2. *Cinq articles défectueux.*

II. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi de Poisson. Cette approximation est-elle justifiée ?

III. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi normale. Cette approximation est-elle justifiée ?

***Exercice 2 :** (08 pts)* *Un étudiant qui ne veut pas assister à ses cours, se met à la porte d'entrée de l'université, et chaque fois qu'une voiture entre, il lance une pièce de monnaie qui donne pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $q = 1 - p$.*

On admet que le nombre de voitures qui entrent à l'université est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson $P(\lambda)$. On note Y le nombre de piles obtenues et Z le nombre de faces obtenues.

1. *Pour $X = k$ fixé, donner la loi de Y.*
2. *Donner la loi du couple (X, Y). (On demande de donner $P(X = k, Y = l)$).*
3. *Donner la loi marginale de Y, ainsi que $E[Y]$.*
4. *Déduire la loi marginale de Z.*
5. *Donner la loi du couple (Y, Z). (On demande de donner $P(Y = l, Z = m)$).*
6. *Calculer $Cov(Y, Z)$.*

Corrigé Examen final.
MI. Proba-Stat.

Exercice 1: On propose les notations.

F : " le testeur donne un résultat erroné (faux) "

D : " l'appareil électroménager est défectueux "

R : " Voyant rouge allumé "

V : " Voyant vert allumé "

1. Le test est erroné dans deux cas de figure

- Voyant vert allumé et l'appareil électroménager est défectueux.

ou

- Voyant rouge allumé et l'appareil électroménager n'est pas défectueux.

Donc $F = (V \cap D) \cup (R \cap \bar{D})$

Remarquons que $(V \cap D) \cap (R \cap \bar{D}) = V \cap R \cap D \cap \bar{D} = \emptyset$.

Donc la probabilité cherchée est donnée par:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(V \cap D) + P(R \cap \bar{D}) \\ &= P(V/D) \cdot P(D) + P(R/\bar{D}) \cdot P(\bar{D}) \\ &= (1-0{,}98) \cdot 0{,}05 + (1-0{,}96)(1-0{,}05) \\ &= 0{,}039 \end{aligned}$$

(03pts)

2. On cherche $P(D/V)$; on utilise la formule de Bayes.

$$P(D/V) = \frac{P(V/D) \cdot P(D)}{P(V/D) \cdot P(D) + P(\bar{D}) \cdot P(V/\bar{D})}$$

$$= \frac{0{,}05 \times 0{,}02}{0{,}02 \times 0{,}05 + 0{,}95 \times 0{,}96}$$

$$= 0{,}001.$$

(03pts)

Exercice 2 :

I. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'article défectueux parmi 112, la probabilité qu'un article soit défectueux est de 0,03

X suit une loi binômiale $B(112, 0{,}03)$; $P(X=k) = C_{112}^{k}(0{,}03)^{k}(0{,}97)^{112-k}$

$$P(X=2) = C_{112}^{2}(0{,}03)^{2}(0{,}97)^{110} = 0{,}1958$$ 1pt

$$P(X=5) = C_{112}^{5}(0{,}03)^{5}(0{,}97)^{107} = 0{,}125.$$ 1pt

II. Faisons une approximation par une loi de Poisson $P(\lambda)$; $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$\lambda = np = 112 \times 0{,}03 = 3{,}36$$

$$P(X=2) = e^{-3{,}36}\frac{(3{,}36)^2}{2!} = 0{,}196$$

$$P(X=5) = e^{-3{,}36}\frac{(3{,}36)^5}{5!} = 0{,}124$$ 1pt

Cette approximation est justifiée car $p = 0{,}03 < 0{,}1$ et $n = 112 > 50$ d'ailleurs les résultats sont quasi les mêmes que ceux obtenus en I. 1pt

III. Faisons une approximation par une loi Normale $N(m, \sigma)$.

$$m = np = 3{,}36 \quad , \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{112(0{,}03)(0{,}97)} = 1{,}8.$$

N étant continue, on approxime $X = 2$ par $1{,}5 \leq X \leq 2{,}5$.

- $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5) = P\left(-1{,}03 \leq \frac{X-3{,}36}{1{,}8} \leq -0{,}48\right)$

$= F(-0{,}48) - F(-1{,}03) = F(1{,}03) - F(0{,}48)$

$= 0{,}8485 - 0{,}6844$ (de la table de $N(0,1)$)

$= 0{,}1641.$

- $P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5) = P\left(0{,}63 \leq \frac{X-3{,}36}{1{,}8} \leq 1{,}19\right) = F(1{,}19) - F(0{,}63)$

$= 0{,}8830 - 0{,}7357 = 0{,}1473$ 1pt

Cette approximation n'est pas justifiée car bien que $n = 112 > 18$ mais $\underline{\underline{p < 0{,}1}}$; Il est nécessaire d'avoir p "non petit" ($p > 0{,}1$) pour que cette approximation soit justifiée 1pt

Exercice 3 :

1/ $X = k$ fixé (Donc k voitures sont entrées)

on cherche $P(Y=\ell)$

si $\ell > k$ alors $P(Y=\ell) = 0$ (l'étudiant ne lance sa pièce qu'après qu'une voiture soit entrée).

si $\ell \leq k$ Y suit une loi binômiale $B(k,p)$

Donc $$P(Y=\ell) = \begin{cases} C_k^\ell p^\ell q^{k-\ell} & \text{si } \ell \leq k \\ 0 & \text{si } \ell > k \end{cases} = P(Y=\ell/X=k).$$

Nous avons donc calculer la probabilité conditionnelle $P(Y=\ell/X=k)$. $Y=\ell$ sachant que $X=k$.

2pts

2/ $P(X=k, Y=\ell) = P(X=k \text{ et } Y=\ell) = P(\{X=k\} \cap \{Y=\ell\})$

$$= P(Y=\ell/X=k) \cdot P(X=k).$$

ainsi $$P(X=k, Y=\ell) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} C_k^\ell p^\ell q^{k-\ell} & \text{si } \ell \leq k \\ 0 & \text{si } \ell > k. \end{cases}$$

1pt

3/ Loi marginale de Y.

$$P(Y=\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k, Y=\ell) = \sum_{k=\ell}^{+\infty} P(X=k, Y=\ell)$$ [si $k<\ell$ la probabilité est nulle donc $k \geq \ell$.]

$$= \sum_{k=\ell}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} C_k^\ell p^\ell q^{k-\ell} = e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} \sum_{k=\ell}^{+\infty} \frac{\lambda^k q^k}{(k-\ell)!}$$

$$= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+\ell} q^{k+\ell}}{k!} = e^{-\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^\ell \frac{1}{\ell!} \lambda^\ell q^\ell \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^k}{k!}}_{e^{\lambda q}}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!} p^\ell e^{\lambda q} = e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^\ell}{\ell!} \qquad (1-q=p)$$

$$= e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^\ell}{\ell!}$$

ainsi $P(Y=\ell) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^\ell}{\ell!}$, Y suit une loi de Poisson $P(\lambda p)$.

et Donc $E[Y] = \lambda p$.

2pts

4. De même Z suit une loi de Poisson $P(\lambda q)$

5.

$$P(Y=\ell, Z=m) = P(Y=\ell, X=\ell+m)$$

En effet le nombre de jets de pièce est égal au nombre de voitures qui sont entrées, et d'un autre coté la somme des piles et faces obtenues donne le nombre de jets de pièce.

$$P(Y=\ell, Z=m) = P(Y=\ell, X=\ell+m)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\ell+m}}{(\ell+m)!} C_{\ell+m}^{\ell} p^{\ell} q^{m} \quad (\text{ici } \ell+m \geq \ell)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\ell+m}}{(\ell+m)!} \frac{(\ell+m)!}{\ell!\, m!} p^{\ell} q^{m}$$

1pt

Donc $P(Y=\ell, Z=m) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{\ell+m}}{\ell!\, m!} p^{\ell} . q^{m}.$

6. On observe que

$$P(Y=\ell)\, P(Z=m) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^{\ell}}{\ell!} e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^{m}}{m!}$$

$$= e^{-\lambda(p+q)} \frac{\lambda^{\ell+m}}{\ell!\, m!} p^{\ell} q^{m} \quad \text{or } p+q=1.$$

$$P(Y=\ell) . P(Z=m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\ell+m}}{\ell!\, m!} p^{\ell} q^{m}$$

$$= P(Y=\ell, Z=m)$$

Donc Y et Z sont indépendants.

2pts

et par suite $\mathrm{Cov}(Y,Z)=0$