Sujet et corrigé de l'examen final

Algèbre

GI 112

La consultation des copies aura lieu (Inchallah)

le Jeudi 25 janvier à partir de 14h00 au bloc C

Le responsable de la matière

Miri. S

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
1ère Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (06pts)

Montrer par deux méthodes différentes, et pour $n \geq 4$ que l'on a :

$$\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{4(n+2)}$$

Exercice2 : (10 pts)

I. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. Déduire de ce qui précède que A est inversible, et donner son inverse.
3. En utilisant ce qui précède, donner la solution du système

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + z = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$$

II. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $B^3 - 3B^2$.
2. En déduire (sans calculer le déterminant) que la matrice B n'est pas inversible.

Exercice3 : (04pts)

Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x| + 2x + 1$$

1. f est-elle injective ?

2. f est-elle surjective ?

Corrigé Examen final

Exercice 1 $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{4(n+2)}$

1ère méthode : Par récurrence.

- Pour $n=4$ $\displaystyle\sum_{k=4}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{4\times5} + \frac{1}{5\times6} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$

  d'un autre côté $\displaystyle\frac{n-2}{4(n+2)} = \frac{4-2}{4(4+2)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

  1pt

- On suppose que $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{4(n+2)}$ Hypothèse de récurrence

- Il faut montrer que $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)-2}{4((n+1)+2)} = \frac{n-1}{4(n+3)}$

En effet :

$$\sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}}_{H.R} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n-2}{4(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n-2)(n+3)+4}{4(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+n-2}{4(n+2)(n+3)} = \frac{(n-1)(n+2)}{4(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{n-1}{4(n+3)} \quad \text{cqfd}$$

2pts

Ainsi $\forall n \geq 4$ $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{4(n+2)}$.

2ème méthode : Directe.

Observons que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. et par suite, 1pt

$$\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=4}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-4}{4(n+2)} = \frac{n-2}{4(n+2)} \quad \text{cqfd.}$$

2pts

Exercice 2 : I. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. $A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$ 1pt

2. $(A^3 - A = 4I) \Rightarrow \left[\frac{1}{4}(A^2 - I)\right] A = A\left[\frac{1}{4}(A^2 - I)\right] = I.$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$ 2pts

3. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + z = 2 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 0z + 2x = 1 \\ 0y + z - x = 2 \\ y - 2z + 0x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 0z + 2x = 1 \\ 0y - z + x = -2 \\ y - 2z + 0x = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$y = 1/2 + 2 + 3/2 \Rightarrow y = 4$

$z = 1/4 + 1 - 3/4 \Rightarrow z = 1/2$

$x = 1/4 - 1 - 3/4 \Rightarrow x = -3/2$

2,5pt

II. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $B^3 - 3B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -2B$ 2pts

2. Supposons (par l'absurde) que B est inversible donc B^{-1} existe

d'après la question précédente on a :

$B^3 - 3B^2 = -2B \Rightarrow B(B^2 - 3B) = -2B \Rightarrow B^{-1}B(B^2 - 3B) = -2B^{-1}B$

$\Rightarrow B^2 - 3B = -2I.$

Or $B^2 - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq -2I$ 2,5pt

Donc B n'est pas inversible

Exercice 3

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x| + 2x + 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1- Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

1er cas : $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

2ème cas : $x_1 \leq 0$, $x_2 \leq 0$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

3ème cas : $x_1 > 0$, $x_2 < 0$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = x_2$ impossible car $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$

4ème cas : $x_1 < 0$, $x_2 > 0$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = 3x_2$ impossible car $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$

En conclusion : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ Donc f est injective

2pts

2. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Observons que si $x \geq 0 \Rightarrow 3x + 1 \geq 1$ et si $x \leq 0 \Rightarrow x + 1 \leq 1$.

$y = f(x)$ il faut traiter deux cas

si $y \geq 1 \Rightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3}$.

$\forall y \geq 1 \Rightarrow \exists x = \dfrac{y-1}{3} \geq 0$, $y = f(x)$.

si $y \leq 1 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

$\forall y \leq 1 \Rightarrow \exists x = y - 1 \leq 0$, $y = f(x)$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

f est surjective

2pts