SUITES

Exercice 0.1 *En utilisant la définition de la limite montrer que*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{9} = 1.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si \;\; q > 1 \\ 1 & si \;\; q = 1 \\ 0 \;\; si \;\; 0 < q < 1 & \end{cases}$

Exercice 0.2 *Calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nsin(n!)}{n^2+1}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n+3}\right)^n$

Exercice 0.3 *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

1. *Montrer que* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}.$
2. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.$

Exercice 0.4 *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \frac{2}{9} \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}.$
2. *Etudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 0.5 *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$
2. *Etudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 0.6 *Montrer que les deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *définies par*

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

sont adjacentes.

Exercice 0.7 *Montrer que la suite de terme général* $u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ *est divergente.*

FONCTIONS

Exercice 0.8 *Etudier la parité des fonctions suivantes*
1. $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$
2. $f(x) = \frac{sinx}{x^2}$
3. $f(x) = x^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 0.9 *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{cosx}{1+x^2}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 0.10 *Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point ce qui suit*
1. $\lim\limits_{x\to 1} 3x+3 = 6$
2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$

Exercice 0.11 *Calculer les limites suivantes*
1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Exercice 0.12 *Montrer que les limites suivantes n'existent pas*

$$\lim_{x\to 0} sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad et \ \lim_{x\to 0} cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

puis calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\left((sinx)\left(sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(x^3\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

Exercice 0.13 *Etudier la continuité des fonctions suivantes*
1. $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2-2}{2} & si\ x \geq 1 \\ cos(x-1) & si\ x < 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^n\left(sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ *où* $n \in \mathbb{N}$

Exercice 0.14 *Trouver les réels* $\alpha, \beta,$ *et* γ *pour que les fonctions suivantes soit continues sur* $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \leq 1 \\ 3-\alpha x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2sinx & si\ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \beta sinx + \gamma & si\ -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ cosx & si\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 0.15 *Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux points où elles ne sont pas définies ?*

$$f_1(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f_2(x) = \frac{(x-1)\,sinx}{2x^2-2}$$

$$f_3(x) = sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 0.16 *Montrer que l'équation*

$$x = e^{-x}$$

admet une solution unique dans l'intervalle $[0, 1]$*, puis localiser cette solution dans un intervalle de longueur* $l = 0.015625$.

DERIVATION

Exercice 0.17 *Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants*
$f(x) = x^x$, $f(x) = e^{x^x}$, $f(x) = cos(x^5)$, $f(x) = cos^5(x)$, $f(x) = arctg(e^x)$

Exercice 0.18 *Calculer la dérivée $n^{ième}$ des fonctions suivantes*
1. $f(x) = e^{ax}$
2. $f(x) = sinx$
3. $f(x) = cosx$
4. $f(x) = \frac{1}{1-x}$
5. $f(x) = \frac{1}{1+x}$
6. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 0.19 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = (x-a)\,g(x)$. Montrer que f est dérivable en a, et calculer $f'(a)$.*

Exercice 0.20 *Montrer que*

$$Arcsinx + Arcosx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 0.21 *Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ dérivables sur $]a,b[$ et ne s'annulant pas, et telles que*

$$f(a)g(b) = f(b)g(a)$$

Montrer qu'il existe un $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$$

Exercice 0.22 *Soit x, y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que*

$$x < \frac{y-x}{lny - lnx} < y$$

Exercice 0.23 *Donner le développement de Taylor Maclaurin pour $n = 5$, des fonction suivantes :*
1.$f(x) = e^x$
2.$f(x) = sinx$
3.$f(x) = cosx$
4.$f(x) = ln(1+x)$
5.$f(x) = (1+x)^\alpha$
6.$f(x) = Arctgx$

Exercice 0.24 *En utilisant un développement de Taylor, calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx - x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(sinx)^4}$

Exercice 0.25 *Donner une valeur approchée de* $\sqrt{e}$ *à* 10^{-4} *près.*