Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

<u>Exercice1 :</u> (08 pts)

1. *Montrer par <u>deux méthodes différentes</u> que :*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

2. *<u>Déduire</u> de ce qui précède la valeur de*

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2+3k+2}$$

<u>Exercice2 :</u> (12 pts)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$, *où α est un paramètre réel.*

1. *Pour quelles valeurs du paramètre α; la matrice M est-elle inversible ?*
2. *Lorsque cela est possible calculer M^{-1}.*
3. *<u>Déduire</u> de ce qui précède la solution du système*

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z = 36 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{cases}$$

Année 2021 - 2022.

Algèbre L1. GI

Corrigé type de l'Examen final

Exercice 1 : 1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+1}{n+2}$

1ère méthode : Par récurrence.

- Pour $n=0$ on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$ vérifiée pour $n=0$. (1pt)

- On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+1}{n+2}$ (Hypothèse de Récurrence)

- Il faut montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{n+2}{n+3}$

En effet : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} + \frac{1}{(n+1)^2+3(n+1)+2} = \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{n^2+5n+6}$ (HR)

$$= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+4n+4}{(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+2}{n+3} \quad \text{cqfd.}$$ (02pts)

2ème méthode : Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$ (1pt)

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{cqfd.}$$ (02pts)

2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2+3k+2} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k^2+3k+2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+3k+2}$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{(n-1)+1}{(n-1)+2}$$ (D'après la première question)

$$= \frac{2n+1}{2n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1-2n}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}$$ (02pts)

Exercice 2 : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \alpha) + (\alpha^2 - 1) + (\alpha - 1)$

$= \alpha(\alpha - 1) + (\alpha - 1)(\alpha + 1) + (\alpha - 1) = (\alpha - 1)\left[\alpha + \alpha + 1 + 1\right] = (\alpha - 1)(2\alpha + 2)$

$= 2(\alpha - 1)(\alpha + 1)$ (02pts

M est inversible ssi $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$. (1pt

2. On suppose que $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$, Dans ce cas M^{-1} existe.

$$Com(M) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \alpha - 1 \\ \alpha^2 + \alpha & \alpha^2 - 1 & -(\alpha + 1) \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ (02pts

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t Com(M) = \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \alpha & \alpha^2 + \alpha & -2 \\ 1 - \alpha^2 & \alpha^2 - 1 & 0 \\ \alpha - 1 & -(\alpha + 1) & 2 \end{pmatrix}$$ (02pts

3. $\begin{cases} 2x - 4y + 8z = 36 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + 4z = 18 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$ (02pts

On reconnait la matrice M avec $\alpha = -2$, on obtient alors : (1pt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{6}(12 - 36) = -4$

$y = 1/6 \times 18 = 3$

$z = 1/6 \times (6 + 36) = 7$

$x = -4$; $y = 3$; $z = 7$. (02pts